

l_p 范数惩罚比例仿射投影广义最大相关熵算法

张峻琿¹, 王 豫^{1,2}

(1. 西南交通大学 电气工程学院, 成都 611756;

2. 磁浮技术与磁浮列车教育部重点实验室, 成都 611756)

摘要: 针对非高斯噪声下的稀疏系统辨识, 提出了 l_p 范数惩罚比例仿射投影广义最大相关熵 (LP-PAPGMC) 算法; 该算法结合了广义最大相关熵对脉冲噪声的鲁棒性和仿射投影在应对强相关输入信号时的适应性, 以及比例矩阵和 l_p 范数惩罚约束所带给算法针对稀疏系统的性能提升; 考虑到 LP-PAPGMC 算法采用恒定核宽度进行权值更新, 存在收敛速度与稳态偏差之间的固有权衡, 采用变核宽度策略动态调整该算法核宽度, 进而提出了 LP-VKWPAPGMC 算法; 通过在高斯噪声和混合高斯噪声下对不同稀疏度的系统进行辨识, 验证了 LP-PAPGMC 算法和其变核宽度算法相较于其他相关仿射投影算法具有更快的收敛速度和更低的稳态偏差; 在混合高斯噪声和混合 α -稳定噪声下的声学回声消除场景中, LP-PAPGMC 算法和 LP-VKWPAPGMC 算法相较于其他仿射投影算法展现出性能优势。

关键词: 广义最大相关熵; 仿射投影; 非高斯噪声; 稀疏系统; 系统辨识; 声学回声消除

l_p -Norm-Penalized Proportionate Affine Projection Generalized Maximum Correntropy Algorithm

ZHANG Junhui¹, WANG Yu^{1,2}

(1. School of Electrical Engineering, Southwest Jiaotong University, Chengdu 611756, China;

2. Key Laboratory of Magnetic Suspension Technology and Maglev Vehicle,

Ministry of Education, Chengdu 611756, China)

Abstract: For the identification of sparse systems under non-Gaussian noise, an L_p -norm-penalized proportionate affine projection generalized maximum correntropy (LP-PAPGMC) algorithm is proposed; This algorithm integrates the robustness of generalized maximum correntropy to impulsive noise and the adaptability of affine projection to strongly correlated input signals, along with the enhancements in performance for sparse systems provided by the proportionate matrix and L_p -norm-penalized constraint; By considering that the LP-PAPGMC algorithm uses a constant kernel width for weight updates, there is an inherent trade-off between convergence speed and steady-state bias. Therefore, by using a variable kernel width strategy to dynamically adjust the kernel width of the algorithm, an L_p -norm-penalized variable kernel-width proportionate affine projection generalized maximum correntropy (LP-VKWPAPGMC) algorithm is proposed; By identifying a system with different sparse matrices under the conditions of Gaussian noise and mixed Gaussian noise, it has been validated that the LP-PAPGMC and its variable kernel width algorithms have notable advantages over other related affine projection algorithms in convergence speed and steady-state biases; In acoustic echo cancellation scenarios with mixed Gaussian noise and mixed α -stable noise, the LP-PAPGMC and LP-VKWPAPGMC algorithms are superior to other affine projection algorithms in performance.

Keywords: generalized maximum correntropy; affine projection; non-Gaussian noise; sparse systems; system identification; acoustic echo cancellation

0 引言

在自适应滤波 (AF, adaptive filter) 算法的实际

应用中, 如网络回波消除、水下通讯^[1-3]等, 稀疏系统广泛存在。稀疏系统是指在描述该系统的权值向量中,

收稿日期: 2025-04-06; 修回日期: 2025-05-09。

基金项目: 教育部重点实验室开放课题基金(2022ML0015)。

作者简介: 张峻琿(1998-), 男, 硕士。

王 豫(1960-), 男, 博士, 教授。

引用格式: 张峻琿, 王 豫. l_p 范数惩罚比例仿射投影广义最大相关熵算法[J]. 计算机测量与控制, 2025, 33(9): 291-301.

等于零的或趋近零的权值系数占绝大部分,而较大的权值系数仅占很小的比例。传统的 AF 算法,例如最小均方 (LMS, least mean square) 算法和归一化 LMS (NLMS, normalized LMS) 算法,在开发时并未考虑未知系统的稀疏特性。因此,在处理高稀疏度的系统时,这些算法可能会遇到收敛速度下降和稳态误差增大的问题。

为了提高 AF 算法应对高稀疏性系统的性能,研究者们相继开发出大量针对稀疏系统的 AF 算法。这些算法主要可以分为两大类:成比例类^[4-7]和零吸引类^[8-13]。

文献 [4] 提出了成比例归一化最小均方 (PNLMS, proportionate NLMS) 算法,这标志着成比例类算法研究的重要开端。该算法通过非均匀步长分配机制,使各权值系数的更新步长与其绝对值成近似正比关系,从而显著提升了该算法在稀疏系统中的收敛速度^[4]。为了进一步提高 PNLMS 算法的性能,文献 [5] 开发出一种自适应调整步长的 PNLMS 算法。由于 PNLMS 算法对系统的稀疏性极为敏感,故其在处理非稀疏系统时性能会显著降低。为解决该问题,文献 [6] 提出了改进的 PNLMS (IPNLMS, improved PNLMS) 算法。通过改进比例矩阵的计算方式,IPNLMS 算法在稀疏和非稀疏系统中获得了较 PNLMS 算法更好的性能。尽管 PNLMS 算法及其改进算法在稀疏系统中的性能优于 NLMS 算法,但在处理具有强相关性的输入信号时,其收敛速度仍然较慢。因此,文献 [7] 将比例矩阵与仿射投影 (AP, affine projection) 相结合,提出了成比例仿射投影 (PAP, proportionate AP) 算法,以应对当输入信号具有强相关性的情况。

但由于 PAP 算法源于 l_2 范数准则,其在非高斯噪声下会出现收敛速度减慢、稳态偏差增加等问题。非高斯噪声是指统计特性偏离高斯分布的随机干扰信号,其核心特征表现为概率密度函数的非对称性、重尾特性或尖峰性。这类噪声通常表现为突发性强、幅值显著的脉冲信号,广泛存在于 AF 算法的实际应用中。

除了成比例方法外,零吸引方法也被广泛用于改善 AF 算法在稀疏系统中的性能,其本质上是向原本的代价函数中添加不同的范数惩罚约束。文献 [8] 通过将 l_0 范数的近似函数作为惩罚约束引入 LMS 算法的代价函数中,提出了基于 l_0 范数惩罚的 LMS 算法,文献 [9] 对该算法的性能进行了详细的分析。文献 [10] 利用 l_1 范数作为惩罚约束,开发出零吸引 LMS (ZA-LMS, zero-attraction LMS) 算法。然而,由于 ZA-LMS 算法并未对零系数和非零系数进行区分,而是对所有系数施加等强度的惩罚约束,这导致其在低稀疏度系统中因过度惩罚非零系数而性能恶化。为此,文献 [10] 又进一步提出了加权零吸引 LMS (RZA-LMS,

reweighted ZA-LMS) 算法。该算法通过引入一个更接近 l_0 范数行为的对数和惩罚项到 LMS 算法的代价函数中,使其不仅在处理稀疏系统时优于 ZA-LMS 算法,且在应对非稀疏系统时其性能也不会显著下降。通过将权值向量的 l_p 范数作为惩罚约束引入 LMS 算法的代价函数,文献 [11] 提出了基于 l_p 范数惩罚 LMS (LP-LMS, l_p -norm-penalized LMS) 算法,该算法表现出较 ZA-LMS 算法和 RZA-LMS 算法更优越的性能,且拥有更灵活的惩罚约束。LMS 及其改进算法均以最小均方误差 (MMSE, minimum mean square error) 为代价准则,而 MMSE 准则仅考虑误差信号的二阶统计量,这在高斯噪声假设下是最优的。然而,当噪声呈现非高斯分布时,此类算法的收敛速度将显著降低,稳态误差明显增大,性能恶化。

为了提高 AP 算法在稀疏系统中的收敛速度,文献 [12] 将权值向量的 l_1 范数和对数和分别作为惩罚约束引入 AP 算法的代价函数中,推导出 ZA-AP 算法和 RZA-AP 算法。RZA-AP 算法不仅具有较 ZA-AP 算法更好的性能,且其在系统稀疏度下降时也不会受到太大影响。文献 [13] 将 l_p 范数惩罚引入 AP 算法,提出 l_p 范数惩罚 AP (LP-AP) 算法。由于 l_p 范数的阶参数 p 可调, l_p 范数提供了较 l_1 范数更灵活的稀疏惩罚项。

此外,文献 [14] 将 l_1 范数惩罚约束与 PNLMS 算法相结合,提出了零吸引 PNLMS (ZA-PNLMS) 算法,并用类似的方法提出了加权零吸引 PNLMS (RZA-PNLMS) 算法。文献 [15] 将 l_p 范数惩罚约束引入 PNLMS 算法,提出了 l_p 范数惩罚 PNLMS (LP-PNLMS) 算法,其性能优于 ZA-PNLMS 算法和 RZA-PNLMS 算法。尽管上述算法在稀疏系统中表现出优越的性能,但由于其普遍基于二阶统计量,故对非高斯噪声干扰不具有鲁棒性,其性能在非高斯噪声下会显著退化,表现为收敛速度骤降、稳态偏差增大甚至发散。因此,开发出在非高斯噪声下具有鲁棒性且充分利用稀疏系统的结构先验特性的 AF 算法亟待解决。

为了提升 AF 算法在非高斯噪声下的鲁棒性,研究者们引入信息理论学习 (ITL, information theory learning) 中的高阶统计准则,开发了鲁棒的 AF 算法。最大相关熵准则 (MCC, maximum correntropy criterion)^[16-17] 是 ITL 中常用的优化准则,因其在非高斯噪声下的鲁棒性,被广泛应用于 AF 算法以应对非高斯噪声干扰。但在某些情况下,以高斯密度 (GD, gaussian density) 函数为核函数的相关熵并不是最优的选择。陈霸东等人于 2016 年将广义高斯密度 (GGD, generalized GD) 函数作为熵的核函数,提出了广义相关熵^[18] (GC, generalized correntropy),并进一步提出了广义最

大相关熵准则 (GMCC, generalized maximum correntropy criterion)。通过调节形状参数, GMCC 较 MCC 能为算法提供更多的灵活性, 以适应不同的情况。文献 [19] 结合 GMCC 对大异常值的鲁棒性和 AP 的数据重用机制提出了一种鲁棒 AP 算法, 称为仿射投影广义最大相关熵 (APGMC, AP generalized maximum correntropy) 算法。文献 [20] 将 MCC 和 PAP 算法相结合, 提出 PAPMCC 算法, 有效抑制了传统 PAP 算法在脉冲噪声环境中性能退化的问题, 且该算法有效利用系统的稀疏特性, 故其在非高斯噪声环境中的稀疏系统辨识中表现出较好的性能。

本文针对非高斯噪声环境中的稀疏系统辨识, 结合 GMCC 对脉冲噪声的鲁棒性和 AP 对强相关输入信号的适应性, 并充分利用稀疏系统的结构先验特性, 构造了一个鲁棒 AP 约束优化模型。基于该约束优化模型, 提出了 l_p 范数惩罚比例仿射投影广义最大相关熵 (LP-PAPGMC, l_p -norm-penalized proportionate APGMC) 算法, 实现了较 PAPMCC 算法更好的性能。为了进一步提高该算法性能, 利用变核宽度策略动态调整核宽度, 提出了 l_p 范数惩罚变核宽度比例仿射投影广义最大相关熵 (LP-VKWPAPGMC, l_p -norm-penalized variable kernel-width proportionate APGMC) 算法。后续将通过稀疏系统辨识和声学回声消除应用, 对比验证 LP-PAPGMC 算法和 LP-VKWPAPGMC 算法相较于其他相关 AP 算法的性能优势。

1 自适应滤波器应用场景

自适应滤波器在系统辨识、信道均衡、声学回声消除和波束形成等多个领域得到了广泛应用。

1.1 系统辨识

系统辨识可分为线性系统辨识和非线性系统辨识。在线性系统辨识中, 待辨识系统输出 $d(n)$ 可见式 (1):

$$d(n) = x^T(n)w^0 + v(n) \quad (1)$$

式中, $x(n) = [x(n), x(n-1), \dots, x(n-M+1)]^T \in R^M$ 表示 n 时刻的输入信号, M 表示滤波器阶数。 w^0 为待辨识系统的权值向量, 可表示为: $w^0 = [w_1, w_2, \dots, w_M]^T \in R^M$ 。 $v(n)$ 表示 n 时刻的背景噪声。自适应滤波器在 n 时刻的输出为:

$$y(n) = x^T(n)w_{n-1} \quad (2)$$

式中, w_{n-1} 表示自适应滤波器在 $n-1$ 时刻的对待辨识系统权值向量的估计, 可描述为 $w_{n-1} = [w_{n-1,1}, w_{n-1,2}, \dots, w_{n-1,M}]^T \in R^M$ 。则误差信号 $e(n)$ 可见式 (3):

$$e(n) = d(n) - y(n) \quad (3)$$

自适应滤波算法根据误差信号 $e(n)$ 和输入信号 x

(n) 动态调整权值向量 w_{n-1} , 当 w_{n-1} 和待辨识系统权值向量在相同的输入信号下产生的响应近似相等时, 此时可以认为 w^0 和 w_{n-1} 具有相近的系统特性。因此, 可用自适应滤波器的权值向量近似 w^0 , 进而达到系统辨识的目的。

1.2 声学回声消除

自适应回声消除的核心原理是估计出回声路径, 进而得到回声信号的估计信号, 再从传声器信号中减去该信号, 实现回声消除。

远端语音信号 $x(n)$ 被近端扬声器播放后, 经过近端房间内的回声路径 w^0 产生回声信号, 其与近端语音信号 $v_1(n)$ 和背景噪声 $v_2(n)$ 组成近端输入信号 $d(n)$, 可见式 (4):

$$d(n) = x^T(n)w^0 + v_1(n) + v_2(n) \quad (4)$$

另一方面, 自适应滤波器权值通过远端语音信号 $x(n)$ 与其权值向量 w_{n-1} 产生回声信号的估计信号 $y(n)$ 。再从近端输入 $d(n)$ 中减去 $y(n)$, 便得到了消除回声后的误差信号 $e(n)$ 。当滤波器权值向量 w_{n-1} 精确逼近回声路径 w^0 时, 自适应滤波器输出 $y(n)$ 能很好地估计实际的回声信号, 使误差信号 $e(n)$ 中的回声能量显著减弱, 从而实现自适应回声消除。

2 现有研究

2.1 仿射投影

在 AP 算法中, n 时刻的输入矩阵 X_n 、期望信号 $d(n)$ 、滤波器输出 $y(n)$ 、误差向量 $e(n)$ 分别可见式 (5) 至式 (8):

$$X_n = [x(n), x(n-1), \dots, x(n-1+L)] \in R^{M \times L} \quad (5)$$

$$d(n) = X_n^T w^0 + v(n) =$$

$$[d(n), d(n-1), \dots, d(n-L+1)]^T \in R^L \quad (6)$$

$$y(n) = X_n^T w_{n-1} =$$

$$[y(n), y(n-1), \dots, y(n-L+1)]^T \in R^L \quad (7)$$

$$e(n) = d(n) - y(n) =$$

$$[e(n), e(n-1), \dots, e(n-L+1)]^T \in R^L \quad (8)$$

其中: $v(n) = [v(n), v(n-1), \dots, v(n-L+1)]^T \in R^L$ 表示 n 时刻的噪声向量, L 为投影阶数。AP 算法的权值更新公式可见式 (9):

$$w_n = w_{n-1} + \mu X_n (X_n^T X_n + \delta I_L)^{-1} e(n) \quad (9)$$

式中, $\mu \in R^+$ 表示步长因子, 正则化参数 $\delta \in R^+$ 避免了矩阵求逆中的数值问题。AP 算法通过数据重用有效提高了自身的收敛速度。但由于其源自于 l_2 范数准则, 其性能在脉冲噪声环境下会显著下降。

2.2 广义最大相关熵准则

在非高斯噪声下, 基于二阶统计量的 AF 算法的性能会大幅度下降。为解决这一问题, ITL 中的鲁棒优化

准则被广泛用于构建自适应滤波算法的代价函数。相关熵是一种非线性的局部相似性度量,当其核宽度参数设置较小时,其对于脉冲噪声或异常值具有较好的鲁棒性,可见式(10):

$$V_c(X, Y) = E[\kappa(X, Y)] = \int \kappa(x, y) dF_{XY}(x, y) \quad (10)$$

式中, $\kappa(\cdot, \cdot)$ 表示位移不变的默瑟核, $F_{XY}(x, y)$ 表示 X 和 Y 的联合分布函数。相关熵的核函数是 GD 函数,均值为零的 GD 函数可见式(11):

$$\kappa(x, y) = G_\sigma(e) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left(-\frac{e^2}{2\sigma^2}\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp(-\lambda e^2) \quad (11)$$

式中, $e = x - y$, $\lambda = 0.5\sigma^2$ 是核参数, σ 是核宽度。GGD 函数是 GD 函数的推广^[18], 均值为零的 GGD 函数可见式(12):

$$G_{\alpha, \beta}(x, y) = G_{\alpha, \beta}(e) = \frac{\alpha}{2\beta} \Gamma\left(\frac{1}{\alpha}\right) \exp\left(-\left|\frac{e}{\beta}\right|^\alpha\right) = \gamma_{\alpha, \beta} \exp(-\lambda |e|^\alpha) \quad (12)$$

式中, $\Gamma(\cdot)$ 表示伽玛函数, $\alpha > 0$ 为形状参数, $\beta > 0$ 为尺度参数, $\lambda = \frac{1}{\beta^\alpha}$ 为核参数, $\gamma_{\alpha, \beta} = \frac{0.5\alpha}{\beta\Gamma(\alpha^{-1})}$ 为归一化常数。GC 使用 GGD 函数作为核函数, 其定义可见式(13):

$$V_{GC}(X, Y) = E[G_{\alpha, \beta}(X, Y)] = \int G_{\alpha, \beta}(x, y) dF_{XY}(x, y) \quad (13)$$

显然, 相关熵对应于 α 等于 2 的 GC。与相关熵类似, GC 也可以作为估计相关问题中的优化准则^[18]。参考相关熵损失, 广义相关熵损失可被定义为式(14):

$$J_{GC}(X, Y) = G_{\alpha, \beta}(0) - V_{GC}(X, Y) = \gamma_{\alpha, \beta} - V_{GC}(X, Y) \quad (14)$$

由上式可知, 最小化 $J_{GC}(X, Y)$ 等同于最大化 $V_{GC}(X, Y)$ 。由于 GC 不仅能够捕获误差信号的整数阶统计量, 还能获取分数阶统计量。这一特性使得 GM-CC 在处理非高斯噪声时较 MCC 展现出更高的灵活性。

2.3 比例矩阵

PNLMS 算法通过比例矩阵实现各权值步长的非均匀分配, 使其在稀疏系统中的收敛速度显著优于 NLMS 算法。PNLMS 算法的权值更新公式可见式(15):

$$w_n = w_{n-1} + \mu \frac{G_n x_n e(n)}{\delta + x_n^T G_n x_n} \quad (15)$$

式中, G_n 表示比例矩阵, 其计算方法可见式(16)至式(18):

$$G_n = \text{diag}[g_1(n), g_2(n), \dots, g_M(n)] \quad (16)$$

$$g_j(n) = \frac{\varphi_j(n)}{\sum_{k=1}^M \varphi_k(n)}, \quad j \in \{1, 2, \dots, M\} \quad (17)$$

$$\varphi_j(n) = \max\{\rho_g \max\{\delta_g, \|w_{n-1}\|_\infty\}, |\omega_{n-1, j}|\} \quad (18)$$

式中, δ_g 、 ρ_g 是较小的正常数。 δ_g 的目的是避免当所有权值系数在初始为零时, 权值系数更新停止。 ρ_g 的作用是防止当某位置的权值系数远小于最大权值系数时, 该位置的权值系数更新停滞。通常将 δ_g 设置为 $e-2$, ρ_g 设置为 $\frac{5}{M}$ ^[4]。在比例矩阵 G_n 的调节下, 较大的权值系数将获得较大的步长因子, 而较小的权值系数则获得较小的步长因子, 该设计有助于权值系数的独立和分散调整。尽管 PNLMS 算法在高斯噪声环境中表现良好, 但由于其代价函数基于误差信号的二阶统计量, 故在非高斯噪声中, 其滤波性能会有明显的下降。

2.4 l_p 范数惩罚约束

权值向量 w_{n-1} 的 l_p 范数可为算法提供稀疏性惩罚, 可见式(19):

$$\|w_{n-1}\|_p = \left(\sum_{k=1}^M |\omega_{n-1, k}|^p\right)^{1/p} \quad (19)$$

l_p 范数中的阶参数 p 为算法提供了灵活的惩罚项。当 $0 < p < 1$ 时, l_p 范数提供了稀疏性的自然数学度量^[21], 且比 RZA-LMS 算法中的对数和惩罚项更接近 l_0 范数。阶参数 p 的值越小, l_p 范数的稀疏促进效果就越接近于 l_0 范数^[11]。

基于 l_p 范数稀疏约束的算法, 如 LP-LMS 算法、LP-AP 算法等, 虽在稀疏系统中展现较优的性能, 但因依赖于二阶统计量, 其非高斯噪声(尤其是重尾噪声)环境中存在性能显著退化问题。故针对非高斯噪声环境下的稀疏系统辨识, 开发高滤波性能的 AF 算法已成为研究热点。

3 LP-PAPGMC 算法

3.1 算法推导

为了开发在非高斯噪声环境下具有强鲁棒性且适应稀疏系统的 AF 算法, 构造下述约束优化问题:

$$\min_{w_n} \frac{1}{2} \|w_n - w_{n-1}\|_{G_n^{-1}}^2 + \gamma_{LP} \|G_n^{-1} w_n\|_p \quad (20)$$

$$s.t. \quad X_n^T (w_n - w_{n-1}) = g[e(n)]$$

其中: G_n 表示比例矩阵, $\gamma_{LP} \in R^+$ 为比例常数, $g[e(n)]$ 可见式(21):

$$g[e(n)] = \{g[e(n)], g[e(n-1)], \dots, g[e(n-L+1)]\}^T \in R^L \quad (21)$$

其中: 函数 $g(e) = \exp(-\lambda |e|^\alpha) |e|^{\alpha-1} \text{sgn}(e)$, $\text{sgn}(\cdot)$ 表示符号函数。利用拉格朗日乘数法将该约束

优化问题转化为下述代价函数:

$$J(n) = \frac{1}{2} \|\mathbf{w}_n - \mathbf{w}_{n-1}\|_{G_n^{-1}}^2 + \gamma_{LP} \|\mathbf{G}_n^{-1} \mathbf{w}_n\|_p + \{X_n^T(\mathbf{w}_n - \mathbf{w}_{n-1}) - g[e(n)]\}^T \boldsymbol{\lambda} \quad (22)$$

式中, $\boldsymbol{\lambda} = [\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_L]^T \in R^L$ 为拉格朗日乘子向量。计算代价函数 $J(n)$ 对 $\mathbf{w}_n$ 的梯度:

$$\nabla J(n) = \mathbf{G}_n^{-1}(\mathbf{w}_n - \mathbf{w}_{n-1}) + \gamma_{LP} \frac{\|\mathbf{w}_n\|_p^{1-p} \mathbf{G}_n^{-1} \text{sgn}(\mathbf{w}_n)}{\|\mathbf{w}_n\|_p^{1-p} + \varepsilon_p} - X_n \boldsymbol{\lambda} \quad (23)$$

式中, 小的正常数 ε_p 避免了该项分母中出现零的情况。使式 (23) 等于零向量, 可得式 (24):

$$\mathbf{w}_n = \mathbf{w}_{n-1} - \gamma_{LP} \frac{\|\mathbf{w}_n\|_p^{1-p} \text{sgn}(\mathbf{w}_n)}{\|\mathbf{w}_n\|_p^{1-p} + \varepsilon_p} + \mathbf{G}_n X_n \boldsymbol{\lambda} \quad (24)$$

式 (24) 两边同乘以 X_n^T 并利用约束条件化简, 可得 λ 如式 (25) 所示:

$$\lambda = (\mathbf{X}_n^T \mathbf{G}_n \mathbf{X}_n)^{-1} g[e(n)] + \gamma_{LP} (\mathbf{X}_n^T \mathbf{G}_n \mathbf{X}_n)^{-1} X_n^T \frac{\|\mathbf{w}_n\|_p^{1-p} \text{sgn}(\mathbf{w}_n)}{\|\mathbf{w}_n\|_p^{1-p} + \varepsilon_p} \quad (25)$$

将式 (25) 代入式 (24) 中, 可得式 (26):

$$\mathbf{w}_n = \mathbf{w}_{n-1} + \mathbf{G}_n \mathbf{X}_n (\mathbf{X}_n^T \mathbf{G}_n \mathbf{X}_n)^{-1} g[e(n)] - \gamma_{LP} [I_M - \mathbf{G}_n \mathbf{X}_n (\mathbf{X}_n^T \mathbf{G}_n \mathbf{X}_n)^{-1} \mathbf{X}_n^T] \frac{\|\mathbf{w}_n\|_p^{1-p} \text{sgn}(\mathbf{w}_n)}{\|\mathbf{w}_n\|_p^{1-p} + \varepsilon_p} \quad (26)$$

由于式 (26) 中涉及的第 n 时刻的权值向量 $\mathbf{w}_n$ 是未知的, 故假设:

$$\frac{\|\mathbf{w}_n\|_p^{1-p} \text{sgn}(\mathbf{w}_n)}{\|\mathbf{w}_n\|_p^{1-p} + \varepsilon_p} \approx \frac{\|\mathbf{w}_{n-1}\|_p^{1-p} \text{sgn}(\mathbf{w}_{n-1})}{\|\mathbf{w}_{n-1}\|_p^{1-p} + \varepsilon_p} \quad (27)$$

这在稳态阶段是合理的^[22-23], 此外矩阵 $\mathbf{G}_n \mathbf{X}_n (\mathbf{X}_n^T \mathbf{G}_n \mathbf{X}_n)^{-1} \mathbf{X}_n^T$ 中的绝大部分元素远小于 1, 故该项可以忽略^[23-25]。引入小的正常数 μ 和 δ , 可见式 (28):

$$\mathbf{w}_n = \mathbf{w}_{n-1} - \gamma'_{LP} \frac{\|\mathbf{w}_{n-1}\|_p^{1-p} \text{sgn}(\mathbf{w}_{n-1})}{\|\mathbf{w}_{n-1}\|_p^{1-p} + \varepsilon_p} + \mu \mathbf{G}_n \mathbf{X}_n (\mathbf{X}_n^T \mathbf{G}_n \mathbf{X}_n + \delta I_L)^{-1} g[e(n)] \quad (28)$$

式中, μ 表示步长因子, δ 避免了矩阵求逆中的数值问题, $\gamma'_{LP} = \mu \gamma_{LP}$ 控制 l_p 范数惩罚项的强度。式 (28) 即为所提 LP-PAPGMC 算法的权值更新公式, 表 1 描述了该算法的详细流程。

3.2 变核宽度策略

核宽度作为计算两个随机变量相似性度量的窗口参数, 直接影响基于 MCC 和 GMCC 的算法的收敛速度和滤波精度。当核宽度较大时, MCC 将趋近于 MMSE 准则, 虽算法收敛速度较快但却降低了算法对脉冲噪声的鲁棒性, 且算法稳态偏差较大。当核宽度较小时, 将有助于算法利用相关熵的特性, 算法的稳态偏差较小, 但当误差的初值较大时, 这会导致算法的收敛速度较慢^[26]。因此, 使用固定核宽度的 MCC 和 GMCC 类算

法难免会在收敛速度和稳态偏差之间面临权衡。由于 LP-

表 1 LP-PAPGMC 算法流程

初始化	$\alpha, \mu, \sigma, \gamma'_{LP}, p, \delta_g = e-2, \rho_g = 5 / M, \delta = e-3, \varepsilon_p = 0.05, \mathbf{w}_0 = \mathbf{0}, \mathbf{G}_0 = \mathbf{I}_M$
每次迭代:	$e(n) = d(n) - X_n^T \mathbf{w}_{n-1}$; j 从 1 到 M: $\varphi_j(n) = \max\{\rho_g \max[\delta_g, \ \mathbf{w}_{n-1}\ _\infty], \mathbf{w}_{n-1,j} \}$; j 从 1 到 M: $g_j(n) = \frac{\varphi_j(n)}{\sum_{k=1}^M \varphi_k(n)}$; $\mathbf{G}_n = \text{diag}[g_1(n), g_2(n), \dots, g_M(n)]$; $\mathbf{w}_n = \mathbf{w}_{n-1} - \gamma'_{LP} \frac{\ \mathbf{w}_{n-1}\ _p^{1-p} \text{sgn}(\mathbf{w}_{n-1})}{\ \mathbf{w}_{n-1}\ _p^{1-p} + \varepsilon_p} + \mu \mathbf{G}_n \mathbf{X}_n (\mathbf{X}_n^T \mathbf{G}_n \mathbf{X}_n + \delta I_L)^{-1} g[e(n)]$;
结束	

PAPGMC 算法使用固定核宽度进行权值更新, 其在收敛速度和稳态偏差之间存在权衡限制。为了提高该算法的性能, 利用变核宽度策略动态调整该算法核宽度, 进而提出了 LP-VKWPAPGMC 算法。

受到文献 [27] 的启发, 在算法的第 n 次迭代中, 假设脉冲干扰未出现, 则在得到误差 $e(n)$ 后, 通过最大化误差指数项来计算最优核宽度。相应的代价函数如式 (29) 所示:

$$\max_{\lambda[e(n)]} J[e(n)] = \exp\{-\lambda[e(n)] |e(n)|^\alpha\} \quad (29)$$

式中, 核参数 λ 被视为误差 $e(n)$ 的函数。 $J(n)$ 对 $e(n)$ 求导, 可见式 (30):

$$J'[e(n)] = -\exp\{-\lambda[e(n)] |e(n)|^\alpha\} \{\lambda'[e(n)] |e(n)|^\alpha + \alpha \lambda[e(n)] |e(n)|^{\alpha-1} \text{sgn}[e(n)]\} \quad (30)$$

式中, 表示 $\lambda[e(n)]$ 对 $e(n)$ 的一阶导数。令式 (30) 为零, 可得式 (31):

$$\lambda[e(n)] = \frac{1}{2\sigma_n^2} = \frac{c_1}{|e(n)|^\alpha} \Rightarrow \sigma_n^2 = c_2 |e(n)|^\alpha \quad (31)$$

式中, c_1, c_2 为比例常数。然而, 若直接将式 (31) 代入权值更新公式 (28) 中, 会丧失误差指数项提供的鲁棒性, 当脉冲干扰发生时会导致算法性能严重下降。为增强算法鲁棒性, 可以利用误差 $e(n)$ 方差的估计值判断是否发生脉冲干扰, 并据此调整核宽度^[28]。

当脉冲噪声未出现时, $e(n)$ 的方差 σ_e^2 可由式 (32) 估计:

$$\sigma_e^2 = \beta_1 \sigma_e^2 + (1 - \beta_1) e^2(n) \quad (32)$$

式中, β_1 为 σ_e^2 的平滑系数, 通过移动平均法更新 σ_e^2 可提高其稳定性。 $\kappa(n) = K_\sigma \sigma_e^2$ 是检测脉冲噪声的阈值, 随 σ_e^2 动态调整。 K_σ 是置信度参数, 设置为 2.81^[29]。当 $|e(n)| \leq \kappa(n-1)$ 时, 则认为该次迭代未受脉冲噪声影响, 此时, σ_e^2, σ_n^2 分别按照式 (32) 和式 (33) 更新:

$$\sigma_n^2 = \beta_2 \sigma_{n-1}^2 + (1 - \beta_2) \min[|e(n)|^a, \sigma_{n-1}^2] \quad (33)$$

式中, β_2 为 σ_n^2 的平滑系数。核宽度初值设置为 σ_0 , 下限设置为 $\sigma_{\min}$ 。当 $\kappa(n-1) < |e(n)|$ 时, 则认为该次迭代受到脉冲噪声影响, σ_e^2 、 $\kappa(n)$ 、 σ_n^2 保持上一时刻值, 并使用 $\sigma_{\min}$ 作为权值更新的核宽度。

由于式 (33) 中的最小值函数会导致算法在系统突变时失去跟踪能力, 因此需设置重置机制。误差绝对值窗口 A_n 可见式 (34):

$$A_n = [|e(n)|, |e(n-1)|, \dots, |e(n-Nw+1)|] \quad (34)$$

式中, Nw 表示窗口长度, 通常设置为 32。 $\min En = \min(A_n)$ 表示 A_n 中的最小值, 在每次迭代中判断 $\min En$ 是否大于阈值 $\kappa(n-1)$ 。若 $\min En$ 大于阈值 $\kappa(n-1)$, 则认为算法此时已经无法有效跟踪系统变化, 需重置算法参数: σ_e 重置为 A_n 的四分位数、 σ_n 重置为 σ_0 、权值向量重置为零向量^[28]。

表 2 详细描述了上述变核宽度策略, 该策略控制算法核宽度跟随自适应过程实现从大到小的变化, 从而使算法获得了较快的收敛速度和较低的稳态偏差。且该策略使核宽度能够在脉冲干扰发生时和待辨识系统发生变化时做出相应的调整, 有效提升了算法的抗脉冲干扰能力与跟踪性能。

表 2 变核宽度策略

初始化	α 、 σ_0 、 $\sigma_{\min}$ 、 σ_e 、 $\kappa(0)$ 、 β_1 、 β_2 、 Nw
每次迭代:	
1.	$e(n) = d(n) - x^T(n)w_{n-1}$;
2.	判断 n 是否大于 Nw ;
3.	若成立: $A_n = [e(n) , e(n-1) , \dots, e(n-Nw+1)]$;
4.	$\min En = \min(A_n)$;
5.	判断 $\min En$ 是否大于 $\kappa(n-1)$;
6.	若成立: σ_e 重置为 A_n 的四分位数;
7.	σ_n 重置为 σ_0 ;
8.	w_n 重置为零向量;
9.	结束本次迭代;
10.	判断 $e(n)$ 是否小于等于 $\kappa(n-1)$;
11.	若成立: $\sigma_e^2 = \beta_1 \sigma_e^2 + (1 - \beta_1) e^2(n)$;
12.	$\kappa(n) = K_e \sigma_e^2$;
13.	$\sigma_n^2 = \beta_2 \sigma_{n-1}^2 + (1 - \beta_2) \min[e(n) ^a, \sigma_{n-1}^2]$;
14.	$\sigma_n^2 = \max(\sigma_n^2, \sigma_{\min}^2)$;
15.	使用 σ_n 更新权值向量;
16.	结束本次迭代;
17.	若不成立: σ_e^2 、 σ_n^2 、 $\kappa(n)$ 保持上一时刻值;
18.	使用 $\sigma_{\min}$ 更新权值向量;
19.	结束本次迭代;
结束	

LP-VKWPAPGMC 算法的权值更新按照式 (28) 进行, 并根据表 2 描述的变核宽度策略动态调整核宽度。

4 仿真实验

该部分对提出的 LP-PAPGMC 算法和 LP-VKW-PAPGMC 算法进行了 MATLAB 仿真实验, 并将这两种算法与相关的 AP 算法进行对比分析, 包括 PAP 算法^[7]、LP-AP 算法^[13]、APGMC^[19] 算法、APS 算法^[30] 以及 PPMCC 算法。所有算法的投影阶数均设置为 4。选取均方偏差 (MSD, mean square deviation) 作为性能评估标准。

选取基于 l_1 范数和 l_2 范数的稀疏度量方法对未知系统的权值向量进行度量, 该方法具体描述为:

$$\tau(w^0) = \frac{M}{M - \sqrt{M}} \left(1 - \frac{\|w^0\|_1}{\sqrt{M} \|w^0\|_2} \right) \quad (35)$$

式中, $\|\cdot\|_1$ 、 $\|\cdot\|_2$ 分别为向量的 l_1 范数和 l_2 范数。未知稀疏系统的权值向量长度为 512, 经归一化处理以达到单位功率。选取三种稀疏度依次由低到高的未知系统进行辨识, 其稀疏度按式 (35) 计算分别为 0.791 3、0.873 9 和 0.921 8。

4.1 关键参数设置策略

1) l_p 范数的阶参数 p 越小时, l_p 范数的稀疏促进效果与 l_0 范数就越相似, 但这并不意味着使用 l_p 范数进行稀疏惩罚约束的算法将获得更好的性能, 反而有可能降低算法的性能。因此, 阶参数 p 的取值需要根据噪声环境、算法的其他参数设置、未知系统的稀疏度等综合考虑。

2) l_p 范数惩罚系数 γ'_{LP} 控制着 l_p 范数惩罚项的强度, 若该参数设置过小, 惩罚项无法有效对零或接近零的非活动系数施加零吸引力。若该参数设置过大, 就会过度抑制非零系数的更新, 干扰正常的权值更新过程, 导致算法性能降低。故参数 γ'_{LP} 的设置应主要考虑待辨识系统的稀疏度, 稀疏度越高, γ'_{LP} 的取值越大, 反之则越小。在 LP-VKWPAPGMC 算法中, 稳态核宽度较小, 算法在稳态时需平衡误差权值更新与稀疏惩罚约束的作用, 故 γ'_{LP} 的取值需结合 $\sigma_{\min}$ 进行调整。

3) 在不同工作环境中, 形状参数 α 的最佳取值可能不同, 而 GGD 函数的形状参数为算法提供了更多的选择。形状参数 α 需优先确定, 其取值对算法整体性能的影响较大。

4.2 高斯噪声下的系统辨识

本节在信噪比为 30 dB 的高斯噪声环境中对稀疏系统进行系统辨识。输入信号是由标准高斯信号经过极点为 0.7 的一阶滤波系统 $G(z) = \frac{1}{(1 - 0.7z^{-1})}$ 产生^[31],

表 3 高斯噪声下 LP-PAPGMC 算法和 LP-VKWPAPGMC 算法参数设置

稀疏度	算法	α	μ	σ	γ'_{LP}	p	σ_0	σ_{tiny}	β_1	β_2
0.791 3	LP-PAPGMC	2.5	0.06	2.24	8e-8	0.8	—	—	—	—
	LP-VKWPAPGMC	2.5	0.5	—	2e-8	0.8	6	0.01	0.999 4	0.998
0.873 9	LP-PAPGMC	2	0.1	2.24	1e-7	0.8	—	—	—	—
	LP-VKWPAPGMC	2.5	0.6	—	5e-8	0.8	10	0.02	0.999 6	0.998
0.9218	LP-PAPGMC	2.5	0.1	2.24	4e-7	0.8	—	—	—	—
	LP-VKWPAPGMC	2.5	0.2	—	4e-7	0.8	10	0.025	0.999 4	0.999

本节所有结果均通过 200 次独立试验取平均所得。LP-PAPGMC 算法和 LP-VKWPAPGMC 算法在本节中的参数设置详见表 3, 其余算法参数已在结果图中示出。

1) 对稀疏度为 0.791 3 的稀疏系统进行辨识, 结果如图 1 所示。LP-VKWPAPGMC 算法实现了最快的收敛速度和最低的稳态偏差, 经过 1 000 次迭代, 其 MSD 达到了一 16.75 dB, 且其稳态 MSD 达到了一 35.25 dB。LP-PAPGMC 算法性能略优于 PAP 算法和 PAMCC 算法, 仅次于 LP-VKWPAPGMC 算法。PAP 算法和 PAMCC 算法的 MSD 曲线几乎完全重合。由于 LP-AP 算法利用了 l_p 范数惩罚约束, 故其稳态偏差较低, 略低于 PAP 算法和 PAMCC 算法, 但其收敛速度较慢。由于 APGMC 算法和 APS 算法未利用待辨识系统的稀疏特性, 故在稀疏系统辨识中性能表现一般。

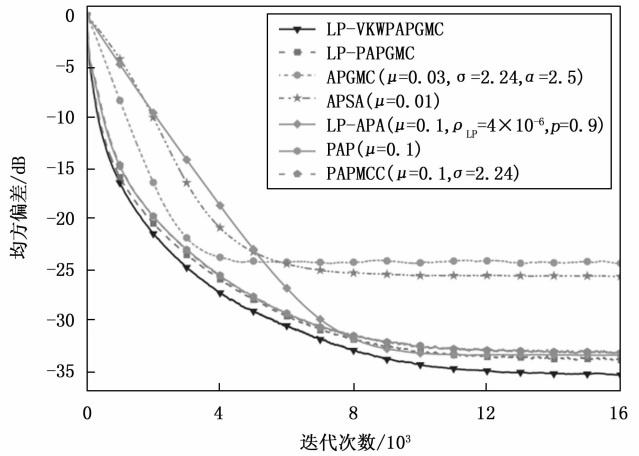


图 1 各算法在稀疏度为 0.791 3 的系统下的性能比较

2) 对稀疏度为 0.873 9 的稀疏系统进行辨识, 结果如图 2 所示。LP-VKWPAPGMC 算法和 LP-PAPGMC 算法的收敛速度最快。LP-VKWPAPGMC 算法实现了最低的稳态 MSD, 达到了一 36.32 dB, LP-PAPGMC 算法的稳态 MSD 仅次于 LP-VKWPAPGMC 算法, 达到了一 33.75 dB。PAP 算法和 PAMCC 算法的性能表现非常接近。PAP 算法和 PAMCC 算法在稀疏系统中的收敛速度快于 APS 算法和 APGMC 算法, 这表明比例矩阵能显著提升算法在稀疏系统中的收敛速度。

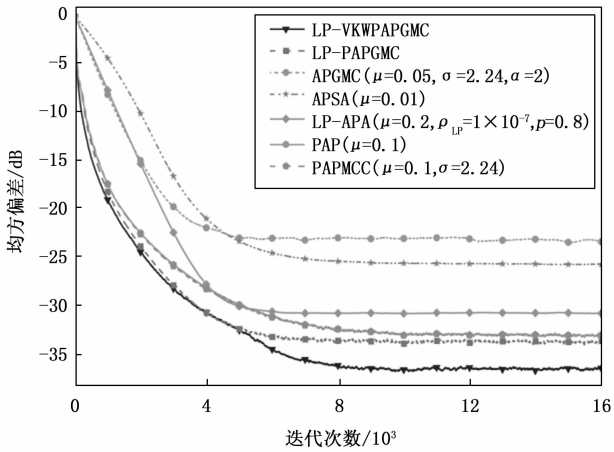


图 2 各算法在稀疏度为 0.873 9 的系统下的性能比较

3) 对稀疏度为 0.921 8 的稀疏系统进行辨识, 结果如图 3 所示。LP-VKWPAPGMC 算法的收敛速度最快且稳态 MSD 最低, LP-PAPGMC 算法的性能次之, 二者性能明显优于其他算法。随着未知系统稀疏度增加, l_p 范数惩罚约束能够逐渐提升算法在处理稀疏系统时的性能。二者随着未知系统稀疏度增加性能逐渐提升, 已经明显优于 PAP 算法和 PAMCC 算法。PAP 算法和 PAMCC 算法通过利用比例矩阵, 明显提高了其在稀疏系统中的收敛速度。由于受到 l_p 范数的惩罚约束, LP-AP 算法实现了较低的稳态偏差。在高

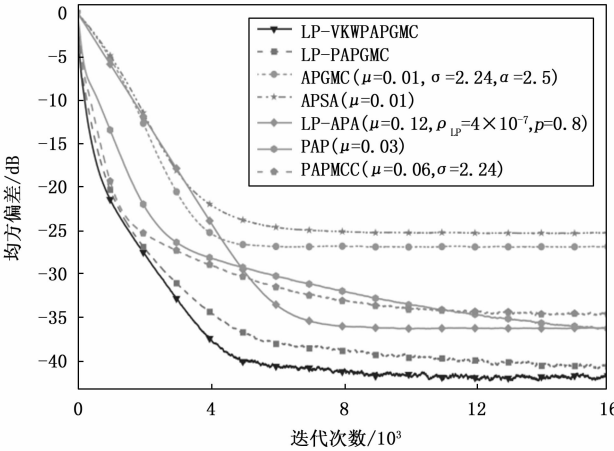


图 3 各算法在稀疏度为 0.921 8 的系统下的性能比较

表 4 非高斯噪声下 LP-PAPGMC 算法和 LP-VKWPAPGMC 算法参数设置

稀疏度	算法	α	μ	σ	γ'_{LP}	p	σ_0	σ_{tiny}	β_1	β_2
0.791 3	LP-PAPGMC	1.5	0.1	2.24	4e-8	0.8	—	—	—	—
	LP-VKWPAPGMC	1.5	0.1	—	8e-8	0.8	4	0.1	0.999 4	0.999 2
0.873 9	LP-PAPGMC	1.5	0.1	2.24	8e-7	0.8	—	—	—	—
	LP-VKWPAPGMC	1.5	0.1	—	4e-8	0.8	10	0.2	0.999 5	0.9992
0.921 8	LP-PAPGMC	2	0.1	2.24	8e-7	0.8	—	—	—	—
	LP-VKWPAPGMC	2	0.1	—	8e-7	0.8	5	0.07	0.999 3	0.999 2

斯噪声环境下的稀疏系统辨识中，LP-VKWPAPGMC 算法因其核宽度变化策略，其性能优于 LP-PAPGMC 算法。

4.3 混合高斯噪声下的系统辨识

本节在混合高斯噪声环境中对稀疏系统进行系统辨识。混合高斯噪声由混合高斯分布生成，具有 30 dB 的信噪比和一 30 dB 的信干比，脉冲噪声的发生概率为 0.1^[32]。未知稀疏系统和输入信号同第 4.1 节，本节所有结果均通过 200 次独立试验取平均所得。LP-PAPGMC 算法和 LP-VKWPAPGMC 算法在本节中的参数设置详见表 4，其余算法参数已在结果图中示出。

1) 对稀疏度为 0.791 3 的稀疏系统进行辨识，结果如图 4 所示。LP-VKWPAPGMC 算法和 LP-PAPGMC 算法的收敛速度最快，LP-VKWPAPGMC 算法的稳态 MSD 最低，达到 -29.25 dB。LP-PAPGMC 算法的稳态 MSD 次之，达到 -23.98 dB，略优于 PAMCC 算法。由于 MCC 对非高斯噪声的鲁棒性以及比例矩阵的非均匀步长分配机制，PAMCC 算法在该环境中展现出较好的效果，其稳态 MSD 达到了 -23.19 dB。由于 LP-AP 算法和 PAP 算法源于 l_2 范数准则，其性能在脉冲噪声环境中明显下降。APGMC 算法和 APS 算法虽因其鲁棒性抑制了脉冲噪声的干扰，但因未利用待辨识系统的稀疏特性，其收敛速度和滤波精度仍次于 PAMCC 算法。

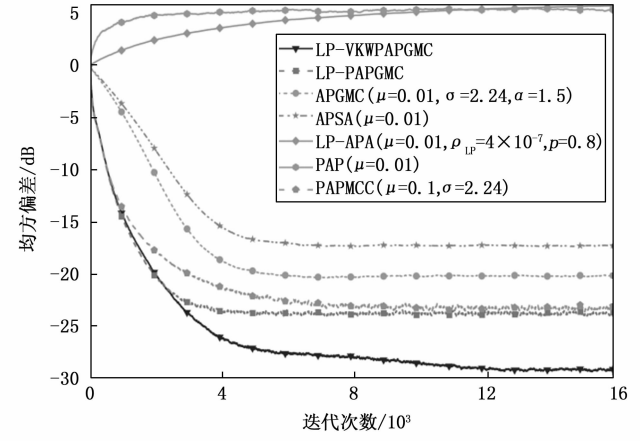


图 4 各算法在稀疏度为 0.791 3 的系统下的性能比较

2) 选取稀疏度为 0.873 9 的稀疏系统进行系统辨识，结果如图 5 所示。随着待辨识系统稀疏度的提高，LP-VKWPAPGMC 算法和 LP-PAPGMC 算法的性能得到提升。LP-VKWPAPGMC 算法性能最佳，经过 4 000 次迭代，其 MSD 达到 -29.57 dB。LP-PAPGMC 算法的性能次之，经过 4000 次迭代，其 MSD 达到 -25.51 dB。随着稀疏度的提高，LP-PAPGMC 算法的性能已经明显优于 PAMCC 算法。

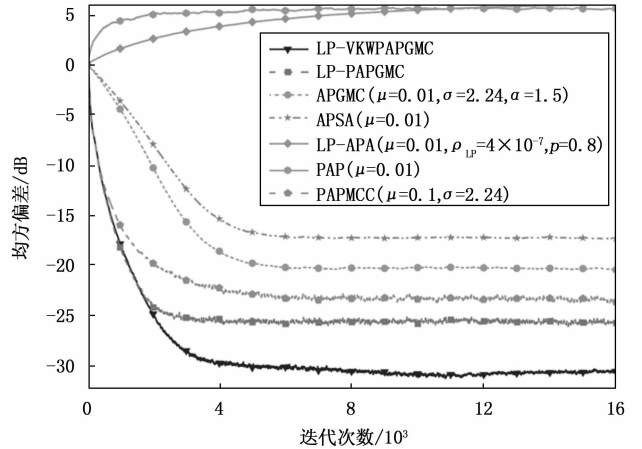


图 5 各算法在稀疏度为 0.873 9 的系统下的性能比较

3) 选取稀疏度为 0.921 8 的稀疏系统进行系统辨识，结果如图 6 所示。随着稀疏度的进一步提高，LP-VKWPAPGMC 算法的稳态 MSD 降至 -37.85 dB，而

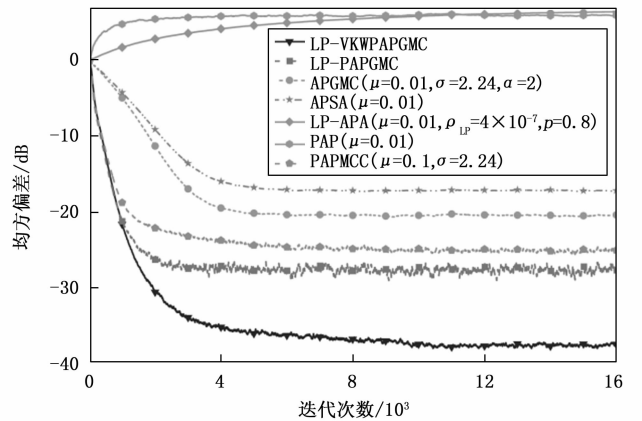


图 6 各算法在稀疏度为 0.921 8 的系统下的性能比较

LP-PAPGMC 算法的稳态 MSD 则为 -28.04 dB。此外, 二者的收敛速度最快。LP-VKWPAPGMC 算法经 1 000 次迭代, 其 MSD 降至 -21.45 dB。LP-PAPGMC 算法经 1 000 次迭代, 其 MSD 降至 -21.24 dB。

在混合高斯噪声下的稀疏系统辨识中, LP-VKW-PAPGMC 算法的性能表现最优, LP-PAPGMC 算法次之。

4.4 声学回声消除

本节对 LP-PAPGMC 算法和 LP-VKWPAPGMC 算法与其他相关的 AP 算法在声学回声消除场景中进行了性能对比研究。选取稀疏度为 0.873 9 的稀疏系统脉冲响应权值向量作为回声路径。输入信号是采样率为 8 kHz 的语音信号, 可见图 7。本节所有结果均通过 100 次独立试验取平均获得。回声路径在迭代的中间时刻从 w^0 变为 $-w^0$, 以对比各算法的跟踪性能。对于 LP-PAPGMC 算法和 LP-VKWPAPGMC 算法, 设置形状参数 α 为 1.5, l_p 范数惩罚系数 γ'_{LP} 为 $8e-8$, 阶参数 p 为 0.8, 余下参数设置详见表 5。其余算法的参数信息已在结果图中展示。

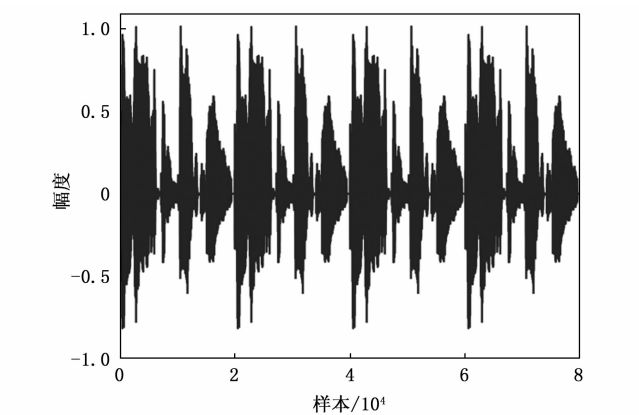


图 7 语音信号

表 5 声学回声消除场景中 LP-PAPGMC 算法和 LP-VKWPAPGMC 算法参数设置

噪声环境	算法	μ	σ	σ_0	$\sigma_{\min}$	β_1	β_2
混合高斯噪声	LP-PAPGMC	0.006	2.24	—	—	—	—
	LP-VKWPAPGMC	0.01	—	2.24	0.05	0.999 4	0.999 8
混合 α 稳定噪声	LP-PAPGMC	0.06	2.24	—	—	—	—
	LP-VKWPAPGMC	0.007	—	2.24	0.05	0.999 2	0.999 6

选取同第 4.2 节设置的混合高斯噪声作为加性噪声, 结果如图 8 所示。选取混合 α 稳定噪声作为加性噪声^[31], 其中脉冲噪声由向量 $v_a(1.1, 0, 0.03, 0)$ 确定的 α 稳定分布生成, 背景噪声设置同第 4.1 节, 结果如图 9 所示。

LP-VKWPAPGMC 算法在混合高斯噪声和混合 α

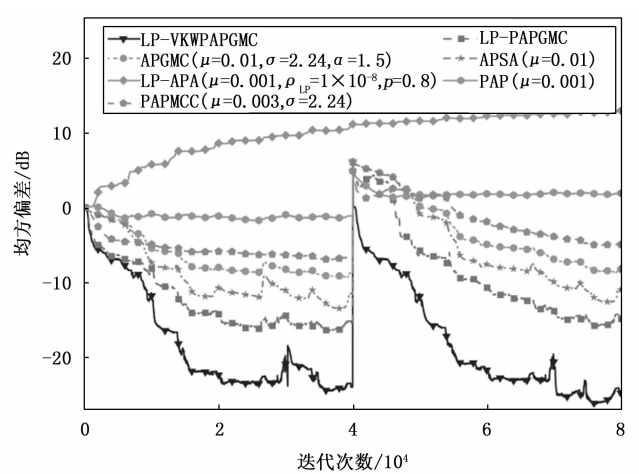


图 8 混合高斯噪声中的声学回声消除性能对比

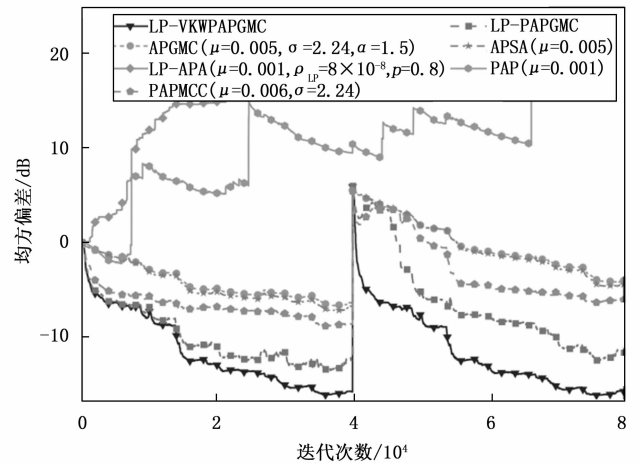


图 9 混合 α 稳定噪声中的声学回声消除性能对比

一稳定噪声均展现了最佳性能, 实现了最快的收敛速度和最低的稳态偏差。此外, 由于变核宽度策略中的核宽度重置机制, 其还具有出色的跟踪性能, 能够迅速适应未知系统的变化。LP-PAPGMC 算法的性能仅次于 LP-VKWPAPGMC 算法, 明显优于 PAMCC 算法和 APGMC 算法。

5 结束语

针对非高斯噪声下的稀疏系统辨识问题, 利用 GMCC 和 AP, 并充分利用稀疏系统的结构先验特性, 构造了一个鲁棒 AP 约束优化模型。基于该约束优化模型, 提出了 LP-PAPGMC 算法。并利用变核宽度策略动态调整该算法核宽度, 进而提出了 LP-VKWPAPGMC 算法。在高斯噪声和混合高斯噪声环境下对不同稀疏度的系统进行系统辨识时, LP-PAPGMC 算法和 LP-VKWPAPGMC 算法相较于其他相关 AP 算法展现了更优越的性能。在混合高斯噪声和混合 α -稳定噪声下的声学回声消除场景中, LP-VKWPAPGMC 算法相较于

其他算法展示了最优的性能。LP-PAPGMC 算法的性能仅次于 LP-VKWPAPGMC 算法, 明显优于 PAPMCC 算法和 APGMC 算法。

LP-PAPGMC 算法和其变核宽度算法在稀疏系统中展现出优异的性能。然而, 研究如何改进算法使其在非稀疏系统中也能展现出类似的优异表现, 具有极高的研究价值。这样的研究不仅能增强算法的通用性, 还将拓宽其应用领域。

参考文献:

- [1] ETTER D. Identification of sparse impulse response systems using an adaptive delay filter [C] // Tampa: IEEE International Conference on Acoustics, Speech, and Signal Processing, 1985. 1169 - 1172.
- [2] LI W, PREISIG J C. Estimation of rapidly time-varying sparse channels [J]. IEEE Journal of Oceanic Engineering, 2008, 32 (4): 927 - 939.
- [3] SHI W, LI Y, ZHAO L, et al. Controllable sparse antenna array for adaptive beamforming [J]. IEEE Access, 2019, 7: 6412 - 6423.
- [4] DUTTWEILER D L. Proportionate normalized least-mean-squares adaptation in echo cancelers [J]. IEEE Transactions on Speech and Audio Processing, 2000, 8 (5): 508 - 518.
- [5] JELFS B, MANDIC D P. A unifying framework for the analysis of proportionate NLMS algorithms [J]. International Journal of Adaptive Control and Signal Processing, 2015, 29 (9): 1073 - 1085.
- [6] BENESTY J, GAY S L. An improved PNLMS algorithm [C] // Orlando: IEEE International Conference on Acoustics, Speech, and Signal Processing, 2002. II-1881 - II-1884.
- [7] PALEOLOGU C, CIOCHINA S, BENESTY J. An efficient proportionate affine projection algorithm for echo cancellation [J]. IEEE Signal Processing Letters, 2009, 17 (2): 165 - 168.
- [8] GU Y, JIN J, MEI S. l_0 norm constraint LMS algorithm for sparse system identification [J]. IEEE Signal Processing Letters, 2009, 16 (9): 774 - 777.
- [9] SU G, JIN J, GU Y, et al. Performance analysis of l_0 norm constraint least mean square algorithm [J]. IEEE Transactions on Signal Processing, 2012, 60 (5): 2223 - 2235.
- [10] CHEN Y, GU Y, HERO A O. Sparse LMS for system identification [C] // Taiwan: IEEE International Conference on Acoustics, Speech and Signal Processing, 2009: 3125 - 3128.
- [11] TAHERI O, VOROBYOV S A. Sparse channel estimation with l_p -norm and reweighted l_1 -norm penalized least mean squares [C] // Prague: IEEE International Conference on Acoustics, Speech and Signal Processing, 2011: 2864 - 2867.
- [12] MENG R, DE LAMARE R C, NASCIMENTO V H. Sparsity-aware affine projection adaptive algorithms for system identification [C] // London: Sensor Signal Processing for Defence, 2011.
- [13] LI Y, LI W, YU W, et al. Sparse adaptive channel estimation based on l_p -norm-penalized affine projection algorithm [J]. International Journal of Antennas and Propagation, 2014, 2014 (1): 434659.
- [14] DAS R L, CHAKRABORTY M. Improving the performance of the PNLMS algorithm using l_1 norm regularization [J]. IEEE/ACM Transactions on Audio, Speech, and Language Processing, 2016, 24 (7): 1280 - 1290.
- [15] LI Y, HAMAMURA M. An improved proportionate normalized least-mean-square algorithm for broadband multipath channel estimation [J]. The Scientific World Journal, 2014, 2014 (1): 572969.
- [16] SANTAMARIA I, POKHAREL P P, PRINCIPE J C. Generalized correlation function: definition, properties, and application to blind equalization [J]. IEEE Transactions on Signal Processing, 2006, 54 (6): 2187 - 2197.
- [17] LIU W, POKHAREL P P, PRINCIPE J C. Correntropy: properties and applications in non-Gaussian signal processing [J]. IEEE Transactions on Signal Processing, 2007, 55 (11): 5286 - 5298.
- [18] CHEN B, XING L, ZHAO H, et al. Generalized correntropy for robust adaptive filtering [J]. IEEE Transactions on Signal Processing, 2016, 64 (13): 3376 - 3387.
- [19] ZHAO J, ZHANG H, ZHANG J A. Generalized maximum correntropy algorithm with affine projection for robust filtering under impulsive-noise environments [J]. Signal Processing, 2020, 172: 107524.
- [20] JIANG Z, LI Y, HUANG X. A correntropy-based proportionate affine projection algorithm for estimating sparse channels with impulsive noise [J]. Entropy, 2019, 21 (6): 555.
- [21] DONOHO D L. Compressed sensing [J]. IEEE Transactions on Information Theory, 2006, 52 (4): 1289 - 1306.
- [22] LI Y, LI W, YU W, et al. Sparse adaptive channel estimation based on l_p -norm-penalized affine projection algorithm [J]. International Journal of Antennas and Propagation, 2014, 2014 (1): 434659.
- [23] DAS R L, CHAKRABORTY M. Improving the performance of the PNLMS algorithm using l_1 norm regularization [J]. IEEE/ACM Transactions on Audio, Speech,

- and Language Processing, 2016, 24 (7): 1280 – 1290.
- [24] LI Y, HAMAMURA M. An Improved proportionate normalized least-mean-square algorithm for broadband multipath channel estimation [J]. The Scientific World Journal, 2014, 2014 (1): 572969.
- [25] JIANG Z, LI Y, HUANG X, et al. A sparsity-aware variable kernel width proportionate affine projection algorithm for identifying sparse systems [J]. Symmetry, 2019, 11 (10): 1218.
- [26] CHEN B, XING L, LIANG J, et al. Steady-state mean-square error analysis for adaptive filtering under the maximum correntropy criterion [J]. IEEE Signal Processing Letters, 2014, 21 (7): 880 – 884.
- [27] HUANG F, ZHANG J, ZHANG S. Adaptive filtering under a variable kernel width maximum correntropy criterion [J]. IEEE Transactions on Circuits and Systems II: Express Briefs, 2017, 64 (10): 1247 – 1251.
- [28] HUANG W, SHAN H, XU J, et al. Robust variable kernel width for maximum correntropy criterion algorithm [J]. Signal Processing, 2021, 182: 107948.
- [29] HUANG W, LI L, LI Q, et al. Diffusion robust variable step-size LMS algorithm over distributed networks [J]. IEEE Access, 2018, 6: 47511 – 47520.
- [30] SHAO T, ZHENG Y R, BENESTY J. An affine projection sign algorithm robust against impulsive interferences [J]. IEEE Signal Processing Letters, 2010, 17 (4): 327 – 330.
- [31] ZHANG Q, WANG S, LIN D, et al. Robust affine projection tanh algorithm and its performance analysis [J]. Signal Processing, 2023, 202: 108749.
- [32] HUANG X, LI Y, ZAKHAROV Y, et al. Squared sine adaptive algorithm and its performance analysis [J]. IEEE/ACM Transactions on Audio, Speech, and Language Processing, 2023, 31: 3617 – 3628.
- [6] LIU J, YU C, Jiang P, et al. A novel deployment strategy of monitors for vehicle emission remote sensing system [J]. ISA Transactions, 2022.
- [7] 张墨逸, 曹洁, 牛建强, 等. 基于图论与矩阵论的交通检测器布设新方法 [J]. 公路交通科技, 2012, 29 (11): 130 – 134.
- [8] 赵树梅. 基于视觉显著性和图割的图像分割算法优化方案 [J]. 科学技术创新, 2024 (2): 131 – 134.
- [9] VIEIRA B S, FERRARI T, RIBEIRO G M, et al. A progressive hybrid set covering based algorithm for the traffic counting location problem [J]. Expert Systems with Applications, 2020, 160: 113641.
- [10] CAMARA M V O, VIERRA B S, FERRARI T, et al. A hybrid solution method for the bi-objective traffic counting location problem using previous origin-destination trip tables [J]. Optimization and Engineering, 2023, 24 (4): 2693 – 2725.
- [11] 吴向华. 一种考虑交通限制信息的道路网络模型 [J]. 中国科技信息, 2005 (13): 78.
- [12] 赵玉玲, 邵腾戌, 苏德国. 基于图论节点的改进 A-star 栅格路径规划算法 [J]. 廊坊师范学院学报 (自然科学版), 2023, 23 (4): 34 – 38.
- [13] BAXTER J S H, RAJCHL M, MCLEOD A J, et al. Directed acyclic graph continuous max-flow image segmentation for unconstrained label orderings [J]. International Journal of Computer Vision, 2017, 123: 415 – 434.
- [14] HADAVI M, SHAFABI Y. Vehicle identification sensors location problem for large networks [J]. Journal of Intelligent Transportation Systems, 2019, 23 (4): 389 – 402.
- [15] 杨建. 城市道路网络的转弯限制研究 [D]. 大连: 大连理工大学, 2015.
- [16] 林培群, 徐建闽. 基于图论的路网交通检测器之布点 [J]. 控制理论与应用, 2010, 27 (12): 1605 – 1611.
- [17] LAM WHK, LO HP. Accuracy of OD estimates from traffic counts [J]. Traffic Engineering and Control, 1990, 31: 358 – 367.
- [18] LEE J, KIM C M. A roadside unit placement scheme for vehicular telematics networks [C] // International Conference on Advanced Computer Science and Information Technology. Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg, 2010: 196 – 202.
- [19] CHI J, JO Y, PARK H, et al. Intersection-priority based optimal RSU allocation for VANET [C] // 2013 Fifth international conference on ubiquitous and future networks (ICUFN). IEEE, 2013: 350 – 355.
- [20] LI P, HUANG C, LIU Q. BCDP: Budget constrained and delay-bounded placement for hybrid roadside units in vehicular ad hoc networks [J]. Sensors, 2014, 14 (12): 22564 – 22594.
- [21] 展凤萍. 智慧高速公路交通检测器组合布设方法研究 [D]. 南京: 东南大学, 2017.
- [22] LIANG Y, WU Z, HU J. Road side unit location optimization for optimum link flow determination [J]. Computer-Aided Civil and Infrastructure Engineering, 2020, 35 (1): 61 – 79.
- [23] 钟树伟. 高速公路交通流量检测器布设方案研究 [D]. 大连: 大连理工大学, 2021.