

# 压电陶瓷驱动器迟滞非线性误差的建模与分析

王义冬<sup>1</sup>, 李庆春<sup>2</sup>, 赵慧<sup>3</sup>

(1. 中国人民解放军 92228 部队, 北京 100074; 2. 海军装备部装备项目管理中心, 北京 100074;  
3. 北京振兴计量测试研究所, 北京 100074)

**摘要:** 压电陶瓷驱动器的最大迟滞非线性误差可以超过输出行程的 15%, 而快刀伺服系统 (FTS) 要求重复定位精度优于 10 nm, 相对线性度误差优于 0.5%, 压电陶瓷驱动器的误差无法满足该精度要求; 首先对压电陶瓷迟滞非线性误差进行实验分析, 将迟滞非线性误差分为频率无关迟滞现象和频率相关迟滞现象; 接着对 Bouc-Wen (BW) 和 Prandtl-Ishlinskii (PI) 的频率无关迟滞模型进行修正和对比, 确定了采用 PI 模型描述本文的频率无关迟滞现象, PI 模型对频率无关迟滞曲线的辨识精度为 0.392%; 然后设计基于 Hammerstein 模型的频率相关迟滞模型, Hammerstein 模型对频率相关迟滞曲线的辨识误差相比 PI 模型时, 其均方根值降低了 88.068%; 提出了压电陶瓷驱动器迟滞非线性误差的建模方法, 并分析了其有效性和准确性, 给 FTS 伺服控制提供了一种实用的前馈控制器。

**关键词:** 压电陶瓷; 迟滞非线性; Bouc-Wen 模型; Prandtl-Ishlinskii 模型; Hammerstein 模型

## Modeling and Analysis of Hysteresis Nonlinear Error of Piezoelectric Ceramic Actuator

WANG Yidong<sup>1</sup>, LI Qingchun<sup>2</sup>, ZHAO Hui<sup>3</sup>

(1. Army 92228 of PLA, Beijing 100074, China;  
2. Equipment Project Management Center, Naval Armament Department, Beijing 100074, China;  
3. Beijing Zhenxing Institute of Metrology and Measurement, Beijing 100074, China)

**Abstract:** The maximum hysteresis nonlinear error of piezoelectric ceramic actuator can exceed 15% of output displacement. The repeated positioning accuracy and relative linearity error of fast tool servo (FTS) system is better than 10nm and 0.5% respectively, the errors of the piezoelectric ceramic actuator can not meet the requirement of the precision. Firstly, The hysteresis nonlinear error of piezoelectric ceramics is experimentally analyzed, and the hysteresis nonlinear error is divided into the hysteresis phenomena of frequency-independent and frequency-dependent. Then, the frequency-independent hysteresis models of Bouc-Wen (BW) and Prandtl-Ishlinskii (PI) are revised and compared, and it is determined that the PI model is used to describe the frequency-independent hysteresis phenomenon in this paper. The identification accuracy of the PI model for the frequency-independent hysteresis curve is 0.392%. Then a frequency-dependent hysteresis model based on Hammerstein model is designed. Compared with the PI model, the root-mean-square value of Hammerstein model's identification error for the frequency-dependent hysteresis curve is reduced by 88.068%. Finally, a hysteresis nonlinear error modeling method of the piezoelectric ceramic actuator is proposed, and its validity and accuracy are analyzed, which provides a practical feedforward controller for FTS servo control.

**Keywords:** piezoelectric ceramic; hysteresis nonlinear; BW model; PI model; Hammerstein model

## 0 引言

微结构光学阵列 (micro array structure) 能够实现普通元件难以实现的阵列、微小、集成、成像和波前转换等新功能, 因此获得越来越广泛运用<sup>[1]</sup>。惯性约束聚变 (ICF, inertial confinement fusion) 和人工复眼 (ACE, artificial compound eye) 成像系统中均存在微结构光学阵列的应用: ICF 是以激光作为驱动源, 实现受控热核聚变的一项创新技术<sup>[2-6]</sup>; ACE 是高精度导弹常用的导引头。在 ICF 中微结构

光学阵列实现对高能激光束的调制控制, 在 ACE 中微结构光学阵列实现校正正像差和色差, 提高导弹精确制导能力和突防能力<sup>[7]</sup>。

自由曲面 (freeform surface) 的应用使得光学成像系统朝着超视距、高分辨、大视场、宽光谱和灵巧化的方向发展<sup>[8]</sup>。光学成像系统在军事侦查、导弹导航、地质遥感、救灾避险等方面得到极大地运用, 成为各国角逐的重要领域。麦克斯韦望远镜 (JCMT, James Clerk Maxwell telescope) 中的远红外相机<sup>[9-10]</sup>, 其采用 9 块光学复杂曲面金属铝反射

收稿日期: 2022-09-28; 修回日期: 2022-11-08。

作者简介: 王义冬 (1977-), 男, 黑龙江齐齐哈尔人, 博士, 高级工程师, 主要从事航天器保障方向的研究。

引用格式: 王义冬, 李庆春, 赵慧. 压电陶瓷驱动器迟滞非线性误差的建模与分析[J]. 计算机测量与控制, 2023, 31(2): 196-203.

镜,与上一代 SCUBA 相机比,该相机视场角提升了 12 倍,扫描速度提升了上千倍,结构却更加紧凑,充分证明了自由曲面在光学成像系统应用中的巨大优势。

在多周期、大振幅微结构光学阵列的加工中以及自由曲面高频非对称误差的补偿加工中,一般情况下要求刀具的带宽大于 100 Hz,行程在 1 mm 以内,故传统的单点金刚石车削 (SPDT, single point diamond turning) 难以保证制造精度和效率,快速刀具伺服系统 (FTS, fast tool servo) 提供了一种高精度、高效率的加工方法。

FTS 是安装在超精车机床上,其由超精车机床的 X 轴、C 轴、Z 轴和微进给轴组成,FTS 的系统性能指标主要取决于微进给轴,该轴输出位移取决于超精车床的主轴位置和 X 轴的位置。

FTS 加工出来的面形是由 C 轴、X 轴和微进给轴联动切削而成,理论上可以加工出任意的微结构光学阵列和自由曲面,这是因为 FTS 推动刀具运动部分的质量较超精车 Z 轴小,可以实现高频往复运动,FTS 的行程通常小于 1 mm,带宽一般在 1 kHz 以内。超精车机床的 X 轴、C 轴和 Z 轴联动加工面形就是慢刀伺服系统 (STS, slow tool servo)<sup>[11]</sup>,STS 相比较于 FTS 其运动频响较低,其频响在 100 Hz 以下,存在动态响应能力不足、加工效率低、加工时间长等缺点。

随着微结构光学阵列以及光学自由曲面的在军事国防、国民经济中的应用,对兼顾大行程、高频响和高跟踪精度 FTS 的需求较为迫切,而 FTS 的控制能力是制约 FTS 精度的关键技术之一。压电陶瓷驱动的 FTS,其控制难点主要是由压电陶瓷本身特性造成的,压电陶瓷具有输入电压和输出位移的迟滞非线性、蠕变、多值性和记忆性<sup>[12-13]</sup>等特性,这给压电陶瓷驱动的 FTS 伺服控制带来了挑战。

压电陶瓷的迟滞非线性是制约压电陶瓷 FTS 控制精度的最重要因素<sup>[14]</sup>。迟滞非线性可以通过电荷电流控制来校正<sup>[15]</sup>,但该方案不仅可能导致漂移和饱和问题,还可能大幅降低工作范围。另一种解决方案是建立迟滞模型,以便建立前馈补偿算法来校正迟滞非线性<sup>[16]</sup>。现在建立迟滞模型的方法主要有两种,一种是基于压电陶瓷工作原理的物理建模,另一种是不考虑其工作原理将迟滞曲线看成数学问题的现象建模。现象建模得到了广泛应用,其简单性和准确性使得在工程应用上具有物理建模不具备的优势。常见的数学模型有 Preisach 模型<sup>[17]</sup>、广义麦克斯韦滑移滞回模型<sup>[18]</sup>、Duhem 模型<sup>[19]</sup>、Dahl 模型<sup>[20]</sup>、Chua-Stromsmoe 模型<sup>[21]</sup>、Prandtl-Ishlinski 模型<sup>[22]</sup>、Bouc-Wen 模型<sup>[23]</sup>、Jiles-Atherton 模型<sup>[24]</sup>、椭圆拟合模型<sup>[25]</sup>。当压电陶瓷运动频率增加,其迟滞非线性表现出和频率相关的特性,Xiao 等人<sup>[26]</sup>、Deng 等人<sup>[27]</sup>、Tian 等人<sup>[28]</sup>在频率相关迟滞模型方面进行了较多研究。为拟合迟滞模型的曲线,需要估计出迟滞模型中的参数,常用的参数辨识方法有最小二乘法、粒子群算法、神经网络算法、遗传算法、免疫算法和蚁群算法,以及基于上述算法的众多改进算法。

PID 控制在压电陶瓷驱动的 FTS 的伺服控制中具有重要工程实践意义,PID 控制的简便易实现及对系统模型的准确性没有过度要求,使得 PID 控制成为 FTS 伺服控制中的主要控制手段<sup>[29]</sup>。这是因为压电陶瓷的模型易受温度、使用时间和环境等因素影响。实践中压电陶瓷的模型参数不是固定的,使得一些复杂控制算法的简便性、时效性和经济性较差。但是 PID 控制不能抑制非线性误差,故前馈控制和 PID 的复合控制算法在工程上大量应用。此处的前馈控制主要是补偿系统的非线性误差,前馈控制能够大幅增大系统的响应时间,在中高频工况下具有较大优势,而且前馈控制可以补偿掉系统的非线性部分。对迟滞模型求解,然后再求得迟滞逆模型,进而对 FTS 系统进行基于逆模型的前馈补偿。

本文主要对压电陶瓷迟滞非线性误差进行实验分析,将迟滞非线性误差分为频率无关迟滞现象和频率相关迟滞现象。接着对 BW 和 PI 的频率无关迟滞模型进行修正和对比,确定了采用 PI 模型描述本文的频率无关迟滞现象。然后设计基于 Hammerstein 模型的频率相关迟滞模型。提出了压电陶瓷驱动器迟滞非线性误差的建模方法,并分析了其有效性和准确性,给 FTS 伺服控制提供了一种实用的前馈控制器。

## 1 压电陶瓷的非线性效应

为了提高 FTS 系统的控制精度,则须对 FTS 的驱动元件(压电陶瓷)的工作特性具有准确的认识。通过对压电陶瓷输入不同信号的开环性能测试,分析了其输出位移的非线性现象,其结果如图 1~3 所示。

对压电陶瓷输入频率为 1 Hz 幅值为 5 V 的正弦信号,将压电陶瓷的时间一位移曲线转化为相应的电压一位移曲线,如图 1 所示,此曲线为类似椭圆形,该现象表述了压电陶瓷的非线性。图 1 所示现象称为压电陶瓷的迟滞现象,也反映压电陶瓷的多值性。

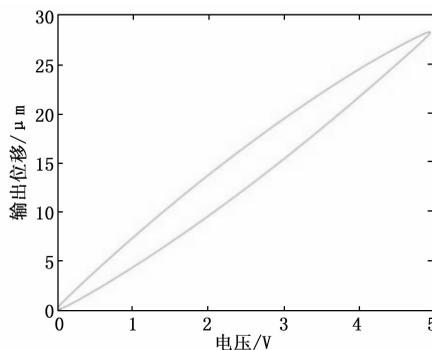


图 1 1 Hz 正弦输入信号的压电陶瓷非线性效应

对压电陶瓷输入相同频率为 1 Hz 幅值分别为 8 V、7 V、6 V、5 V、4 V、3 V、2 V 和 1 V 的正弦信号,绘制出电压一位移曲线如图 2 所示,从图 2 中可得压电陶瓷的迟滞现象会随着幅值的增大而增大,而且还可以看出压电陶瓷运动的第一个周期和之后的周期有差异,即初载曲线和

之后的曲线有区别，这也是压电陶瓷的蠕变和记忆性造成的，压电陶瓷使用之前预热一段时间可以避免初载曲线的问题，故本文将不再讨论该问题。

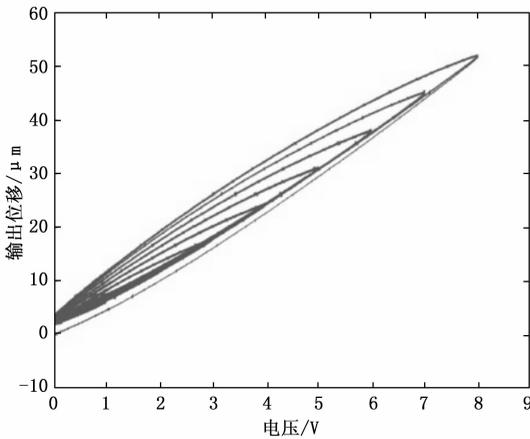


图 2 不同幅值信号下的压电陶瓷非线性效应

对压电陶瓷输入相同幅值 5 V，频率分别为 0.5 Hz、1 Hz、5 Hz、10 Hz、100 Hz、200 Hz 和 400 Hz 的正弦信号，绘制压电陶瓷的电压一位移曲线如图 3 所示，从图 3 可以看出压电陶瓷的迟滞现象会随着频率的增大而增大，从而表现出压电陶瓷的迟滞现象是和输入信号频率相关的，其中 10 Hz 以上的迟滞曲线和 10 Hz 以下的迟滞曲线具有较大差异，本文将 10 Hz 以下的迟滞现象认为和输入信号频率是无关的（以下简称频率无关），将 10 Hz 以上的迟滞现象认为和输入信号的频率是相关的（以下简称频率相关）。

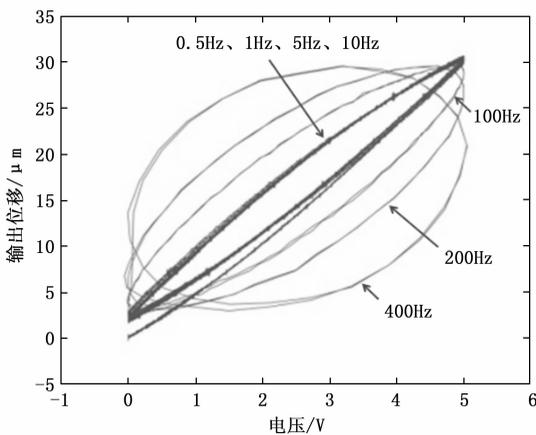


图 3 不同频率信号下的压电陶瓷非线性效应

从以上分析可知，压电陶瓷的迟滞非线性表现出和幅值、频率相关的复杂性，这种非线性误差严重影响了压电陶瓷的伺服控制精度。并且这种非线性误差的最大值可以超过输出行程的 15%，故不能通过传统、便捷和线性的控制算法（如 PID 算法）解决，只能通过前馈算法进行补偿。设计前馈算法的前提是可以准确获得迟滞非线性的数学模型，然后对模型求逆就可得到前馈控制器。

## 2 频率无关和频率相关迟滞模型及其修正

### 2.1 Bouc-Wen 模型及其修正

Bouc R 于 1967 年提出了一种描述位移与恢复力之间迟滞关系的数学模型，在此基础上由 Y. K. Wen 完善<sup>[30]</sup>，最终形成用非线性微分方程描述系统迟滞曲线的 Bouc-Wen 模型，其具有控制器简单的优点，该模型的标准表达式为<sup>[1]</sup>：

$$\begin{cases} F(u)(t) = d \cdot k \cdot u(t) + (1-d)k \cdot h(t) \\ \dot{h}(t) = \alpha \cdot \dot{u}(t) - \beta \cdot |\dot{u}(t)| \cdot |h(t)|^{n-1} \cdot h(t) - \gamma \cdot \dot{u}(t) \cdot |h(t)|^n \end{cases} \quad (1)$$

式中， $F(u)(t)$  为系统输出， $u(t)$  为系统输入， $h(t)$  为系统非线性项， $\dot{h}(t)$  为  $h(t)$  对时间的导数， $k, \alpha, d, \beta, n, \gamma$  为模型参数。

将式 (1) 转化为描述压电陶瓷迟滞曲线的公式如下：

$$\begin{cases} y(t) = d \cdot u(t) - h(t) \\ \dot{h}(t) = \alpha \cdot \dot{u}(t) - \beta \cdot |\dot{u}(t)| \cdot |h(t)|^{n-1} \cdot h(t) - \gamma \cdot \dot{u}(t) \cdot |h(t)|^n \end{cases} \quad (2)$$

式中， $y(t)$  为压电陶瓷位移输出， $u(t)$  为压电陶瓷的电压输入，其中  $n$  具有控制曲线平滑性的作用。

在压电陶瓷的前馈控制中，需要将标准 BW 模型编写入 PowerPMAC 运动控制器，故需将式 (2) 进行离散化处理以便于编程。其离散化公式为：

$$\begin{cases} \Delta u = u(k) - u(k-1) \\ y(k) = d \cdot u(k) - h(k) \\ h(k) = h(k-1) + \alpha \cdot \Delta u - \beta \cdot |\Delta u| \cdot |h(k-1)|^{n-1} \cdot h(k-1) - \gamma \cdot \Delta u \cdot |h(k-1)|^n \end{cases} \quad (3)$$

标准 BW 模型迟滞曲线是关于中心对称的，而压电陶瓷的迟滞曲线是复杂的、非对称的。本文在标准 Bouc-Wen 模型的非线性项里增加若干非对称项，对标准 BW 模型修正使之具有非对称性，称之为非对称 BW 模型，其公式如下<sup>[31]</sup>：

$$\begin{cases} y(t) = d \cdot u(t) - h(t) \\ \dot{h}(t) = \dot{u}(t) \cdot \{ \alpha - |h(t)|^n \cdot \zeta(u, \dot{u}, h)(t) \} \\ \zeta = \beta_1 \operatorname{sgn}(\dot{u}h) + \beta_2 \operatorname{sgn}(\dot{u}u) + \beta_3 \operatorname{sgn}(uh) + \beta_4 \operatorname{sgn}(\dot{u}) + \beta_5 \operatorname{sgn}(h) + \beta_6 \operatorname{sgn}(u) \end{cases} \quad (4)$$

式中， $\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4, \beta_5, \beta_6$  为新引入的参数用来改变标准 BW 模型的对称性。对式 (4) 进行离散化处理以便于编程。其离散化公式为：

$$\begin{cases} \Delta u = u(k) - u(k-1) \\ y(k) = d \cdot u(k) - h(k) \\ h(k) = h(k-1) + \Delta u \cdot \{ \alpha - |h(k-1)|^n \cdot \zeta \} \\ \zeta = \beta_1 \operatorname{sgn}[\Delta u \cdot h(k-1)] + \beta_2 \operatorname{sgn}[\Delta u \cdot u(k-1)] + \beta_3 \operatorname{sgn}[u(k-1) \cdot h(k-1)] + \beta_4 \operatorname{sgn}(\Delta u) + \beta_5 \operatorname{sgn}[h(k-1)] + \beta_6 \operatorname{sgn}[u(k-1)] \end{cases} \quad (5)$$

### 2.2 Prandtl-Ishlinskii 模型及其修正

PI 模型最早是用来描述塑性弹性变形<sup>[22]</sup>。PI 模型具有解析形式、且有逆模型公式以及模型参数易于辨识等优点，

但是无法表述频率相关的迟滞模型, 其在压电陶瓷迟滞非线性控制方面具有重要应用。

双边 play 算子, 如图 4 所示<sup>[12]</sup>, 其输出定义为:

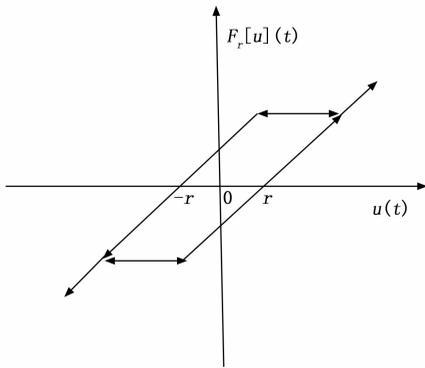


图 4 双边 play 算子

$$\begin{cases} F_r[u](0) = f_r(u(0), 0) \\ F_r[u](t) = f_r(u(t), x(t_i)), t_i < t \leq t_{i+1}, 0 \leq i \leq N-1 \end{cases} \quad (6)$$

$$f_r(u, x) = \max(u - r, \min(u + r, x)) \quad (7)$$

式中, 当  $u(t) \in C_m[0, t_E], C_m[0, t_E]$  为分段连续函数的集合,  $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_N = t_E$  是对时间区间  $[0, t_E]$  的划分, 在点  $t_i$  处均为输入的极值。play 算子的迟滞特性由阈值  $r$  决定。

在描述压电陶瓷的迟滞非线性时由于双边算子中的输入始终具有  $u(t) \geq 0$  的关系, 故采用单边 play 算子可以更简洁的描述压电陶瓷的迟滞现象, 如图 5 所示<sup>[13]</sup>, 其输出定义为:

$$\begin{cases} F_r[u](0) = f_r(u(0), 0) \\ F_r[u](t) = f_r(u(t), x(t_i)), t_i < t \leq t_{i+1}, 0 \leq i \leq N-1 \end{cases} \quad (8)$$

$$f_r(u, x) = \max(u - r, \min(u, x)) \quad (9)$$

式中的各参数及含义和双边 play 算子的一致, 此处不再赘述。

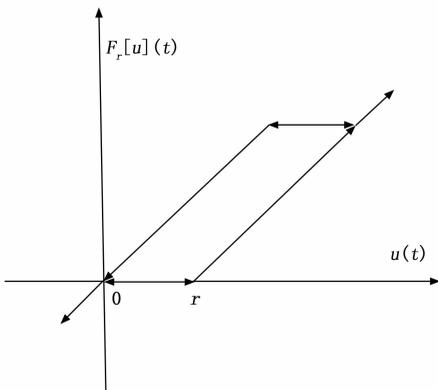


图 5 单边 play 算子

利用不同阈值  $r$  的单边 play 算子加权叠加而成的 PI 模型可以表示为:

$$y(t) = \omega_0 u(t) + \int_0^R \omega(r) F_r[u](t) dr \quad (10)$$

式中,  $y(t)$  为 PI 模型输出,  $\omega(t)$  为不同阈值的单边 Play 算子对应的密度函数,  $F_r[u](t)$  为单边算子。

PI 模型需要编写入 PowerPMAC 运动控制器中, 则需将式 (8) ~ (10) 进行离散化处理以便编程, 其离散化公式为:

$$\begin{cases} Y(k) = \sum_{i=0}^{N-1} \omega_i y_{pi}[u, y_i](t) \\ \sum_{i=0}^{N-1} \omega_i \max\{u(k) - r_i, \min\{u(k), y(k-1)\}\} \\ r_i = \frac{i}{N} \max(|u(k)|), i = 0, 1, \dots, N-1 \end{cases} \quad (11)$$

式中,  $y(k)$  为 PI 模型输出值,  $u$  压电陶瓷输入值,  $r_i$  是 PI 迟滞模型的阈值,  $\omega_i$  是 PI 迟滞模型的密度函数,  $N_{pi}$  为单边 play 算子的个数。

### 2.3 基于 Hammerstein 模型的频率相关迟滞模型

本文提到一种基于 Hammerstein 模型的频率相关迟滞模型来描述压电陶瓷的频率相关迟滞现象<sup>[32]</sup>。Hammerstein 模型由一个非线性模块和一个线性模块组成, 其模型结构如图 6 所示。

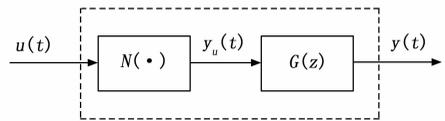


图 6 Hammerstein 模型示意图

Hammerstein 模型中的非线性模块  $N(\cdot)$  定义为 PI 迟滞模型, Hammerstein 模型中的非线性模块  $G(z)$  定义为 ARX 模型, 其模型公式为:

$$G(z) = \frac{b'_0 + b'_1 z^{-1} + \dots + b'_m z^{-m}}{1 + a'_1 z^{-1} + \dots + a'_n z^{-n}} \quad (12)$$

ARX 模型中的参数需要进行辨识, 具体辨识方法是: 将压电陶瓷的电压输入信号  $u(t)$  通过 PI 迟滞模型, 得到 Hammerstein 模型的中间变量  $y_u(t)$ ; 将  $y_u(t)$  和扫频实验的结果  $y'(t)$  作为 ARX 模型的输入和输出, 利用 Matlab 的系统辨识工具箱 (system identification) 对 ARX 模型中的参数进行辨识, 可得 ARX 模型。PI 迟滞模型和得到的 ARX 模型共同组成 Hammerstein 模型, 该模型就是压电陶瓷的频率相关迟滞模型。

## 3 频率无关和频率相关迟滞曲线的辨识

### 3.1 随机粒子群算法的设计

对于非对称 Bouc-Wen 模型, 其中  $d, \alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4, \beta_5, \beta_6, n$  八个参数需要用智能算法对其估计。对于修正的 Prandtl-Ishlinski 模型, 其中  $N_{pi}$  个密度函数  $w_i$  需要用智能算法对其估计。本文采用粒子群算法 (PSO, particle swarm optimization) 作为估计上述参数的智能算法。

粒子群算法是由 Eberhart 和 Kennedy 在 1995 年提

出<sup>[33]</sup>。PSO本质上是一种随机搜索算法，一种智能优化技术。该算法具有概念简明、参数设置少、实现容易、精度高和收敛快等优点，广泛应用于优化问题和搜索问题中。相比其他传统优化算法，PSO收敛到全局最优解的概率较大，它适合在动态、多目标优化的环境中寻优，具有更快的计算速度和全局搜索能力，对待优化的函数没有严苛要求（如可微分、时间连续等），对多变量、高度非线性、不连续及不可微分的情况优势更加突出。

PSO初始化为一群随机粒子，然后通过迭代找到最优解。在每次迭代中，粒子通过跟踪两种极值完成迭代更新：一种是个体极值，也就是粒子本身所找到的最优解；另一种是全局极值，也就是整个粒子群当前找到的最优解。

为了避免陷入局部最优解，本文采用随机权重的 PSO。其原理是将标准 PSO 中的随机权重  $\omega$  设定为随机数，当粒子在接近最优解时，随机产生的  $\omega$  可能为较小值，由此加快收敛速度，还能避免  $\omega$  线性递减不能收敛到全局最优解的问题。

随机权重的 PSO 的计算步骤如下：

- 1) 设置模型参数和最大迭代次数  $M$ ，随机设置每个粒子的位置和飞行惯性（速度）。
- 2) 计算每个粒子的适应度值。
- 3) 获取当前的个体极值和全局极值。
- 4) 更新粒子的飞行惯性（速度）和位置。
- 5) 更新惯性权重。
- 6) 判断是否达到算法停止条件（误差足够小或达到最大迭代次数），如果达到条件则退出算法并输出结果，否则返回到第 2) 步继续迭代。

采用图 2 所示的迟滞曲线，设置随机权重粒子群算法模型参数如表 1 所示，其中采样时间为 0.1 ms。

表 1 随机权重 PSO 算法模型参数

$N_{ps0}$	$c_1$	$c_2$	$\omega_{max}$	$\omega_{min}$	$\sigma$	$M$
50	1.3	1.8	1.1	0.3	0.5	500

表中， $N_{ps0}$ 为粒子群的粒子数， $c_1$ 为个体学习因子， $c_2$ 为群体学习因子， $\omega_{max}$ 为惯性权重最大值， $\omega_{min}$ 为惯性权重最小值， $\sigma$ 为随机权重方差， $M$ 为最大迭代次数。

定义随机权重粒子群算法中的适应度函数，其公式为：

$$F_{rms} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^L (y'_i - y_i)^2}{L}} \quad (13)$$

式中， $L$ 为压电陶瓷输出位移数据的总个数， $y'_i$ 为实验输出数据的第  $i$  个值， $y_i$ 为拟合数据的第  $i$  个值。

定义以下函数来评价拟合效果：

$$NMAX = \frac{\text{Max}(y'_i - y_i)}{\text{Max}(y'_i)} \times 100\% \quad (14)$$

$$NRMS = \frac{F_{rms}}{\text{Max}(y'_i)} \times 100\% \quad (15)$$

$NMAX$ 为归一化最大拟合误差， $NRMS$ 为辨识精度（归一化均方根误差）。

### 3.2 频率无关迟滞曲线的辨识

对标准 BW 中的  $d, \alpha, \beta, \gamma, n$  五个参数进行辨识，其中  $n$  限制为正整数，随机权重 PSO 的模型参数如表 1。辨识结果如图 7 所示。

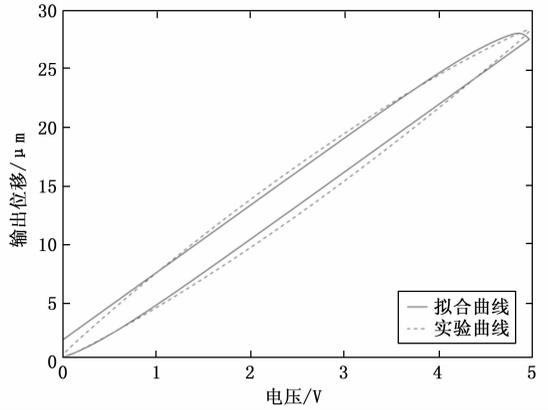


图 7 标准 Bouc-Wen 模型辨识结果

标准 BW 模型辨识结果为， $F_{rms} = 0.522$ ， $NMAX = 2.754\%$ ， $NRMS = 1.848\%$ 。从中可以看出辨识效果较差，对 FTS 所要求的精度而言，该误差是不能接受的。

为了克服标准 BW 模型的缺点，采用非对称 BW 模型来辨识迟滞曲线。利用随机权重粒子群算法对非对称 BW 模型中的  $d, \alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4, \beta_5, \beta_6, n$  九个参数进行辨识，其中  $n$  限制为正整数，随机权重粒子群算法模型参数和表 1 一致，辨识结果如图 8 所示。

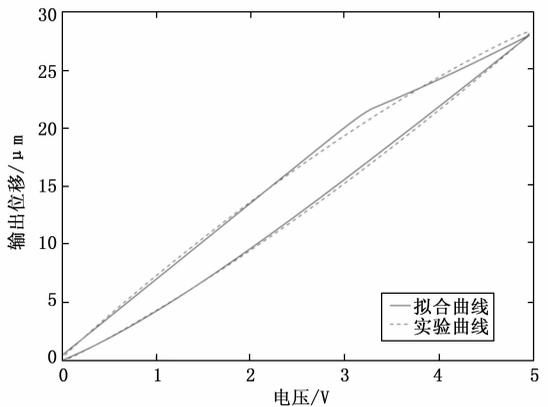


图 8 非对称 Bouc-Wen 模型辨识结果

非对称 BW 模型辨识结果为， $F_{rms} = 0.282$ ， $NMAX = 1.739\%$ ， $NRMS = 0.997\%$ ，辨识精度相对于标准 BW 模型有了较大提升，但是拟合曲线的形状不理想。

为了进一步提高辨识精度，采用修正的 PI 模型拟合迟滞曲线。利用随机权重粒子群算法对式 (11) 中的  $N_{pi}$  个密度函数  $\omega_i$  进行辨识，为了兼顾模型精度和 PI 模型在控制系统中的处理速度， $N_{pi}$  的值取为 10，随机权重粒子群算法模型参数和表 1 一致。辨识结果如图 9 所示。

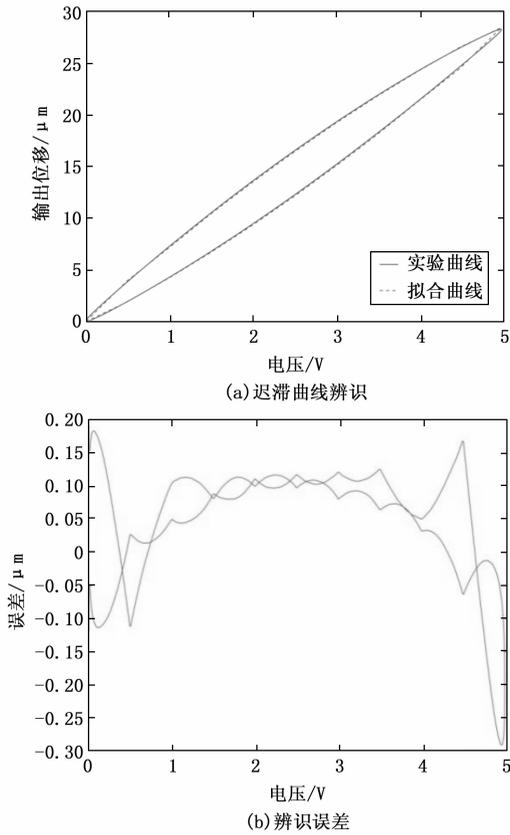


图 9 Prandtl-Ishlinskii 模型模型辨识结果

PI 模型辨识结果为,  $F_{rms} = 0.111$ ,  $NMAX = 0.650\%$ ,  $NRMS = 0.392\%$ , 辨识的变量参数如表 2 中的 Case2 所示。更改随机权重粒子群算法中的粒子群数量和最大迭代

次数, 重新对式 (11) 辨识, 结果如表 2 所示。对比表中的 Case1、Case2 和 Case3, 可知最大迭代次数的增加并不一定会使辨识精度增加, 其一般取值在  $[300, 600]$  之间; 对比表中的 Case2、Case4 和 Case5, 可知粒子群数量的增加并不一定使得辨识精度的增加, 其一般取值在  $[30, 80]$  之间。

为了验证随机权重粒子群算法的可靠性, 将辨识算法更换为遗传算法 (GA, genetic algorithm)<sup>[30]</sup>。具体利用 Matlab 软件中的遗传算法工具箱对式 (11) 中的 10 个密度函数  $\omega_i$  进行辨识, 对这 10 个参数的区间全部设置在  $[-1 \times 10^{-16}, 1 \times 10^{-16}]$  之间, 设置种群大小为 50 个。

PI 模型由 GA 算法辨识的结果为,  $F_{rms} = 0.111$ ,  $NMAX = 0.653\%$ ,  $NRMS = 0.393\%$ , 辨识的变量参数如表 3 所示, 相对比图 12 的辨识结果和辨识精度并没有提升。对比随机权重粒子群算法和 MATLAB 遗传算法工具箱对式 (11) 的辨识情况可以发现, 在辨识精度和运算时间方面随机权重粒子群算法具有明显优势, 证明了随机权重粒子群算法的可靠性和实用性。

综上所述, 随机权重粒子群算法的最大迭代次数一般取值在  $[300, 600]$  之间、粒子群数量一般取值在  $[30, 80]$  之间, 这两个参量对辨识精度的影响有限, 并且将随机权重粒子群算法与 Matlab 遗传算法工具箱的辨识情况进行比较, 以上证明了随机权重粒子群算法可靠性和实用性; 采用随机权重粒子群算法分别对标准 BW 模型、非对称 BW 模型、修正 PI 模型进行辨识, 对应的辨识精度分别为  $1.848\%$ 、 $0.977\%$ 、 $0.392\%$ , 本文最终选择 PI 模型作为压电陶瓷的迟滞模型。

表 2 修正 PSO 辨识 Prandtl-Ishlinskii 模型参数的结果

Case1			Case2			Case3			Case4			Case5		
$N_{ps0} = 50$ $M = 200$			$N_{ps0} = 50$ $M = 500$			$N_{ps0} = 50$ $M = 1\ 000$			$N_{ps0} = 20$ $M = 500$			$N_{ps0} = 100$ $M = 500$		
$i$	$r_i$	$\omega_i$	$i$	$r_i$	$\omega_i$	$i$	$r_i$	$\omega_i$	$i$	$r_i$	$\omega_i$	$i$	$r_i$	$\omega_i$
0	0.000	3.704	0	0.000	3.847	0	0.000	3.832	0	0.000	3.759	0	0.000	3.842
1	0.496	1.569	1	0.496	0.790	1	0.496	0.812	1	0.496	1.059	1	0.496	0.802
2	0.992	-1.363	2	0.992	0.315	2	0.992	0.328	2	0.992	-0.057	2	0.992	0.297
3	1.488	1.775	3	1.488	0.327	3	1.488	0.293	3	1.488	0.750	3	1.488	0.351
4	1.984	0.330	4	1.984	0.328	4	1.984	0.360	4	1.984	0.097	4	1.984	0.303
5	2.480	-0.408	5	2.480	0.280	5	2.480	0.235	5	2.480	-0.401	5	2.480	0.299
6	2.976	0.600	6	2.976	0.265	6	2.976	0.326	6	2.976	1.763	6	2.976	0.255
7	3.472	-0.224	7	3.472	0.411	7	3.472	0.367	7	3.472	-0.649	7	3.472	0.411
8	3.968	1.483	8	3.968	-0.168	8	3.968	-0.141	8	3.968	0.045	8	3.968	-0.161
9	4.464	-0.068	9	4.464	1.582	9	4.464	1.555	9	4.464	1.590	9	4.464	1.574
$F_{rms}$			$F_{rms}$			$F_{rms}$			$F_{rms}$			$F_{rms}$		
0.158			0.111			0.111			0.126			0.111		
NMAX			NMAX			NMAX			NMAX			NMAX		
1.269%			0.650%			0.652%			1.384%			0.651%		
NRMS			NRMS			NRMS			NRMS			NRMS		
0.559%			0.392%			0.392%			0.445%			0.392%		

表 3 GA 辨识 Prandtl-Ishlinskii 模型参数的结果

$i$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$ri$	0.000	0.496	0.992	1.488	1.984	2.480	2.976	3.472	3.968	4.464
$\omega_i$	3.808	0.928	0.099	0.546	0.151	0.399	0.205	0.421	-0.141	1.548

### 3.3 频率相关迟滞曲线的辨识

由图 5 所示分析结果, 可知压电陶瓷的迟滞现象是和频率相关的。对压电陶瓷进行 1 Hz 至 100 Hz, 幅值为 5 V 的扫频实验, 绘制如图 14 所示的迟滞曲线。在 10 Hz 以下时迟滞模型的建立按照频率无关的迟滞模型处理, 当压电陶瓷频率大于 10 Hz 时, 频率的影响将不能忽略。

用表 2 中 Case2 所述的 PI 模型去拟合图 10 的迟滞曲线, 得到的拟合效果如图 11 所示, 其拟合误差的最大值为 4.692  $\mu\text{m}$ , 误差的均方根值为 1.827  $\mu\text{m}$ 。从中可以看出 PI 模型的拟合曲线几乎全部重合为一个迟滞环, 这是因为 PI 模型为频率无关的迟滞模型, 故不能用来描述频率相关迟滞模型。

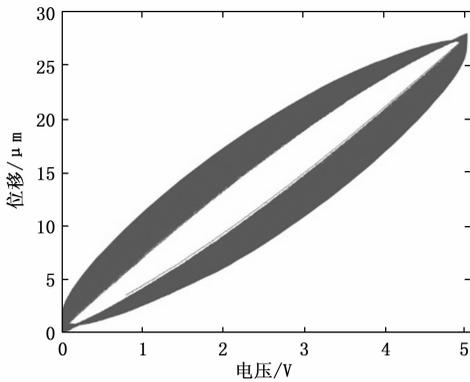


图 10 1~100 Hz 开环扫频的迟滞曲线

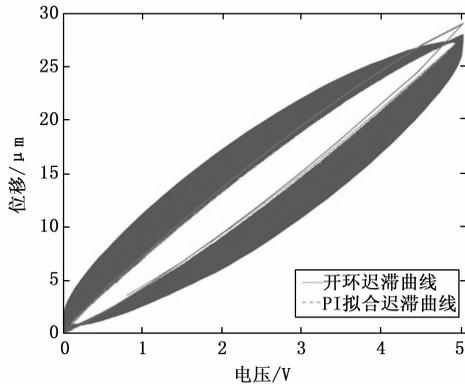


图 11 1~100 Hz 开环扫频的迟滞曲线

本文采用一种基于 Hammerstein 模型的频率相关迟滞模型来描述压电陶瓷的频率相关迟滞现象, 其中定义为 PI 迟滞模型, 其公式为 (11), 公式中的参数为表 2 中 Case2 的数据。利用 Matlab 的系统辨识工具箱对 ARX 模型中的参数进行辨识, 可得辨识精度为 97.73% 的 ARX 模型, 其

表达式为:

$$G(z) = \frac{0.0509 + 0.2810z^{-1} - 0.3173z^{-2}}{1 - 0.9801z^{-1} - 0.3477z^{-2} + 0.1411z^{-3} + 0.2018z^{-4}} \quad (16)$$

PI 迟滞模型和式 (16) 所示的 ARX 模型共同组成 Hammerstein 模型。

用 Hammerstein 模型拟合图 11 所示的迟滞曲线, 其拟合误差的最大值为 0.531  $\mu\text{m}$ , 误差的均方根值为 0.218  $\mu\text{m}$ 。相比较于只用 PI 模型拟合, 误差的最大值降低了 88.683%, 误差的均方根值降低了 88.068%, 说明 Hammerstein 模型在描述频率相关的迟滞模型时具有较好效果。Hammerstein 模型为描述压电陶瓷频率相关迟滞现象提供了一种简单实用的方法。

### 4 结束语

本文为了补偿压电陶瓷迟滞非线性误差, 实验分析了该非线性误差的特性, 将其分为频率无关现象和频率相关现象。利用随机权重粒子群算法分别对标准 BW 模型、非对称 BW 模型、修正 PI 模型进行辨识, 对应的辨识精度分别为 1.848%、0.977%、0.392%, 最终选择 PI 模型作为压电陶瓷的频率无关迟滞模型。设计了基于 Hammerstein 模型的频率相关迟滞模型, 相比 PI 模型对频率相关迟滞曲线的拟合, 其误差的最大值降低了 88.683%, 误差的均方根值降低了 88.068%。本文提出了压电陶瓷驱动器迟滞非线性误差的建模方法, 并分析了其有效性和准确性, 给 FTS 伺服控制提供了一种实用的前馈控制器。

#### 参考文献:

- [1] 柯才军. 微透镜阵列的设计、制作及与 CCD 的集成技术 [D]. 武汉: 华中科技大学, 2005.
- [2] 高莎莎, 吴小军, 何智兵, 等. 激光惯性约束聚变靶制备技术研究进展 [J]. 强激光与粒子束, 2020, 32 (3): 5-14.
- [3] GAO C, QI X B, WEI S, et al. Production of thick-walled hollow glass microspheres for inertial confinement fusion targets by sol-gel technology [J]. Science China Technological Sciences, 2011, 54: 2377-2385.
- [4] RUIZ J A, GONZALEZ-ARRABAL R, RIVERA A, et al. Potential common radiation problems for components and diagnostics in future magnetic and inertial confinement fusion devices [J]. Fusion Engineering and Design, 2011, 86: 1762-1765.
- [5] 王峰, 张兴, 理玉龙, 等. 激光惯性约束聚变研究中高时空诊断技术研究进展 [J]. 强激光与粒子束, 2020, 32 (11): 20-35.
- [6] 杜凯. 快点火锥壳靶制备技术基础研究 [D]. 绵阳: 中国

工程物理研究院, 2014.

- [7] 黄岳田. 单点金刚石车削复杂曲面技术研究 [D]. 北京: 中国科学院大学 (中国科学院光电技术研究所), 2019.
- [8] 朱 钧, 吴晓飞, 侯 威. 自由曲面在离轴反射式空间光学成像系统中的应用 [J]. 航天返回与遥感, 2016, 37 (3): 1-8.
- [9] IVISON R J, SWINBANK A M, SWINYARD B, et al. Herschel and SCUBA-2 imaging and spectroscopy of a bright, lensed submillimetre galaxy at  $z = 2.3$  [J]. *Astronomy and Astrophysics*, 2010, 518 (Pt. 1): L35-1-L35-5.
- [10] 赖 涛. 光学复杂曲面轮廓坐标测量技术 [D]. 长沙: 国防科技大学, 2021.
- [11] 关朝亮. 复杂光学曲面慢刀伺服超精密车削技术研究 [D]. 长沙: 国防科技大学, 2010.
- [12] 秦海辰. 压电陶瓷驱动的运动平台建模与控制研究 [D]. 武汉: 华中科技大学, 2014.
- [13] 谷国迎. 压电陶瓷驱动微位移平台的磁滞补偿控制理论和研究方法研究 [D]. 上海: 上海交通大学, 2012.
- [14] KONG L B, CHEUNG B C F, KWOK T C. Theoretical and experimental analysis of the effect of error motions on surface generation in fast tool servo machining [J]. *Precision Engineering*, 2014, 38: 428-438.
- [15] GOLDFARB M, CELANOVIC N. Modeling piezoelectric stack actuators for control of micromanipulation [J]. *Control Systems, IEEE*, 1997, 17: 69-79.
- [16] LIN C J, LIN P T. Particle swarm optimization based feedforward controller for a XY PZT positioning stage [J]. *Mechatronics*, 2012, 22 (5): 614-628.
- [17] MAYERGOYZ I D. Mathematical Models of Hysteresis [J]. *IEEE Transactions on Magnetics*, 1986, 22: 603-608.
- [18] KRASNOSEL'SKII M A, POKROVSKII A V, FOMENKO I V. Autovibration in systems with hysteresis [J]. *Soviet Physics Doklady*, 1989, 34: 1066.
- [19] STEPANENKO Y, SU C Y. Intelligent control of piezoelectric actuators [C] // *Proceedings of the 37th IEEE Conference on Decision and Control*, IEEE, 1999: 4234-4239.
- [20] LI Y. Dahl model-based hysteresis compensation and precise

positioning control of an XY parallel micromanipulator with piezoelectric actuation [J]. *Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control*, 2010, 132: 558-564.

- [21] CHUA L, BASS S. A generalized hysteresis model [J]. *IEEE Transactions on Circuit Theory*, 1972, 19: 36-48.
- [22] MACKI J, NISTRU P, ZECCA P. Mathematical models for hysteresis [J]. *SIAM Review*, 1993, 35: 94-123.
- [23] 邓志党, 高峰, 刘献栋, 等. 磁流变阻尼器力学模型的研究现状 [J]. *振动与冲击*, 2006, 24: 121-126.
- [24] LEITE J V, SADOWSKI N, KUO-PENG P, et al. The inverse Jiles-Atherton model parameters identification [J]. *IEEE Transactions on Magnetics*, 2003, 39: 1397-1400.
- [25] ANG W T, GARMON F A, KHOSLA P K, et al. Modeling rate-dependent hysteresis in piezoelectric actuators [C] // *IEEE*, 2003, 2: 1975-1980.
- [26] XIAO S, LI Y. Modeling and high dynamic compensating the rate-dependent hysteresis of piezoelectric actuators via a novel modified inverse preisach model [J]. *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, 2013, 21: 1549-1557.
- [27] DENG L, TAN Y. Modeling hysteresis in piezoelectric actuators using NARMAX models [J]. *Sensors and Actuators A-physical-Sensor Actuator A-PHYS*, 2009, 149: 106-112.
- [28] TIAN L, XIONG Z, WU J, et al. A comprehensive inversion approach for feedforward compensation of piezoactuator system at high frequency [J]. *Smart Materials and Structures*, 2016, 25 (9): 095046.
- [29] 程 放. 基于快速刀具伺服的自由曲面车削中切削力建模与分析 [D]. 长春: 吉林大学, 2016.
- [30] WEN Y K. Method for random vibration of hysteretic system [J]. *ASCE J. Eng. Mech. Div.*, 1976, 102(2): 249-263.
- [31] 贾高欣. 基于广义 Bouc-Wen 模型的压电陶瓷作动器建模与内模控制方法研究 [D]. 太原: 太原科技大学, 2018.
- [32] 孙建良. Hammerstein 模型非线性系统辨识算法研究 [D]. 杭州: 浙江大学, 2013.
- [33] 温 正. 精通 Matlab 智能算法 [M]. 北京: 清华大学出版社, 2015.
- qualization combining receivers for space-time block coding in frequency selective channels [C] // *14th IEEE Proceedings on Personal, Indoor and Mobile Radio Communications*, 2003, PIMRC, 2003.
- [19] 梁维泰, 周树茎. 对称带状矩阵的并行 Cholesky 分解及相应线性方程组的并行计算 [J]. *南京航空学院学报*, 1991, 23 (2): 133-138.
- [20] RIALAN C P, SCHARF L L. Fast algorithms for computing QR and Cholesky factors of Toeplitz operators [J]. *IEEE Transactions on Acoustics, Speech, and Signal Processing*, 1988, 36 (11): 1740-1748.
- [21] LI F Q, ZHANG X S. Bayesian estimation of large precision matrix based on cholesky decomposition [J]. *Acta Mathematica Sinica, English Series*, 2019, 35 (5): 619-631.

(上接第 195 页)

- [13] 戴喜增, 彭应宁, 汤 俊. MIMO 雷达检测性能 [J]. *清华大学学报 (自然科学版)*, 2007 (1): 88-91.
- [14] 苗豪伟, 唐智灵. 基于干扰消除的 MIMO-OTFS 系统信号检测研究 [J]. *计算机应用研究*, 2021, 38 (7): 2141-2143.
- [15] SINGH P, GUPTA A, MISHRA H B, et al. Low-complexity ZF/MMSE receivers for MIMO-OTFS systems with imperfect CSI [J]. *arXiv preprint arXiv: 2010.04057*, 2020.
- [16] 李天时. 卫星 OTFS 通信系统信道估计与信号检测研究 [D]. 北京: 北京交通大学, 2021.
- [17] 朱路月. MIMO 水声通信空时编码技术研究 [D]. 南京: 东南大学, 2015.
- [18] CASELLA I R S, JESZENSKY P J E, SOUSA E S. Equalization pos-combining with channel estimation and MIMO joint e-