

# 基于单目视觉和扭摆法原理的 刚体转动惯量测量技术研究

孙天龙, 李鸿基, 汪睿, 鲁承炜, 张烈山

(浙江理工大学 机械与自动控制学院, 杭州 310018)

**摘要:** 在扭摆法转动惯量测量中通常忽略系统阻尼对计算结果的影响, 从而导致测量误差, 针对此问题提出了一种融合视觉检测技术和扭摆法基本原理的刚体转动惯量测量方法: 该方法通过高帧率的工业相机捕获被测物体的扭摆轨迹图像, 经过高斯模糊、二值化和 Canny 边缘算法等处理后提取出图像特征, 根据物像坐标转换关系计算每帧图像对应被测物的扭摆角  $\theta$ , 得到扭摆角-时间曲线; 由该曲线得到扭摆周期  $T$  和阻尼比  $\zeta$ , 再根据转动惯量与扭摆周期、阻尼比之间的数学模型, 最终得到被测刚体的转动惯量值; 实验结果表明, 该方法能够准确识别扭摆阻尼, 实现转动惯量的精确测量, 在  $0 \sim 5 \times 10^{-3} \text{ kg} \cdot \text{m}^2$  范围内, 单次测量误差的绝对值不超过  $2.51 \times 10^{-5} \text{ kg} \cdot \text{m}^2$ , 标准差优于  $1.80 \times 10^{-5} \text{ kg} \cdot \text{m}^2$ 。

**关键词:** 转动惯量; 扭摆角; 阻尼比; 机器视觉; 图像处理

## Research on Measurement Technology of Moment of Inertia of Rigid Body Based on Monocular Vision and Torsion Method

SUN Tianlong, LI Hongji, WANG Rui, LU Chengwei, ZHANG Lieshan

(School of Mechanical Engineering and Automation, Zhejiang Sci-Tech University, Hangzhou 310018, China)

**Abstract:** In the torsional vibration method, the influence of system damping on calculation results is usually neglected, which results in measurement errors. To solve this problem, a rigid body moment of inertia measurement method is proposed, which combines the visual inspection technology with the basic principle of torsional vibration method. This method captures the image of torsional vibration track of measured object by industrial camera with high frame rate, extracts image features after processing such as Gauss blurring, binarization and Canny edge algorithm, and calculates the torsional vibration angle  $\theta$  of each frame image corresponding to the measured object according to object-image coordinate transformation relationship, so the swing angle-time curve is obtained. The torsional vibration period  $T$  and damping ratio  $\zeta$  are obtained from this curve. Then, according to the mathematical model between the moment of inertia, torsional vibration period and damping ratio, the moment of inertia of the tested rigid body is finally obtained. The experimental results show that this method can accurately identify torsional vibration damper and realize accurate measurement of moment of inertia. Absolute error of single measurement does not exceed  $2.51 \times 10^{-5} \text{ kg} \cdot \text{m}^2$  in the range of  $0 \sim 5 \times 10^{-3} \text{ kg} \cdot \text{m}^2$  with standard deviation better than  $1.8 \times 10^{-5} \text{ kg} \cdot \text{m}^2$ .

**Keywords:** moment of inertia; swing angle; damping ratio; machine vision; image processing

## 0 引言

转动惯量是表征刚体转动惯性大小的特征量, 与质量、质心、惯性积等参数共同构成了刚体的质量特性参数。转动惯量是航天飞行器、航空器、汽车、机器人等装备进行姿态控制、运动学分析的重要设计参数, 凡涉及到转动行为的装备一般都需要通过惯性参数的测试来验证它们的转动性能以及质量布局设计的合理性<sup>[1-4]</sup>。

实际工程中, 多采用复摆法<sup>[5-6]</sup>、多线摆法<sup>[7-8]</sup>和扭摆法<sup>[9-10]</sup>等来实现刚体转动惯量的测量, 这类方法统称为谐振法 (Oscillation method)。它们的基本原理都是通过振动传感器记录谐振运动, 并计算出谐振运动的周期, 利用被测刚体绕中心轴的转动惯量与运动周期的平方成正比来计算转动惯量的值。目前来说, 扭摆法因其安全性好、测量精度高等优势, 已被更多的应用于诸如卫星<sup>[11]</sup>、弹箭<sup>[12-13]</sup>等

收稿日期: 2022-01-09; 修回日期: 2022-03-04。

基金项目: 浙江省基础公益研究计划资助项目 (LGF21F050004); 国家级大学生创新创业训练计划项目 (202010338014); 浙江省大学生科技创新活动计划资助项目 (2021R406002)。

作者简介: 孙天龙 (2001-), 男, 浙江临海人, 大学本科, 主要从事视觉图像处理与机器视觉测量技术方向的研究。

通讯作者: 张烈山 (1987-), 男, 浙江杭州人, 博士, 副教授, 硕士生导师, 主要从事机器视觉测量技术、激光多普勒干涉振动测量技术等方向的研究。

引用格式: 孙天龙, 李鸿基, 汪睿, 等. 基于单目视觉和扭摆法原理的刚体转动惯量测量技术研究 [J]. 计算机测量与控制, 2022, 30(7): 49-55.

高技术装备的惯性参数的测试中。

针对扭摆法转动惯量测量技术,国内外学者都展开了丰富的研究,总的来说目前国内外转动惯量测量技术的研究多聚焦于扭振运动阻尼作用及其补偿技术、质量特性多参数融合测量方法等方面。例如,在国内,穆继亮<sup>[14]</sup>等人研究了扭摆运动过程中线性内阻尼对转动惯量测量的影响;郭志荣<sup>[15]</sup>等人则研究了空气阻尼对复杂外形物体转动惯量测量的影响;Zhao<sup>[16]</sup>等人则研究了扭摆运动的非线性阻尼作用,提出了补偿方法;Teng<sup>[17]</sup>等人针对微小卫星的质量特性参数一体化测量进行了研究,研制测量设备;王超<sup>[18]</sup>、边志强<sup>[19]</sup>等人则对某型弹箭的质量特性参数融合测量技术方案进行了研究。在国外,Brancati<sup>[20]</sup>等开发了一套针对于大尺寸大惯量装备的惯性参数一体化测量系统,该系统采用 3 个增量式编码器和扭振测量单元能够实现静态或动态地测定大型物体的惯性参数,并给出了一辆汽车的惯性特性测量实例;Olmedo<sup>[10]</sup>等人也基于扭摆法原理研究了机器人的质量特性参数实验测试方法,研制了一套扭振测试平台;Previati<sup>[21]</sup>等人也针对大质量物体的惯性参数测量研制了类似的一体化测量设备,并通过数值方法分析了设备结构变形对惯性参数测量的影响。

目前转动惯量测量系统中扭振运动的记录方法的研究很少被关注,然而扭振运动的准确记录是实现惯性参数精确测量的前提。在精度要求不高的场合,常常采用光电开关<sup>[22]</sup>、惯性传感器<sup>[23]</sup>等实现扭振运动参数的识别。在高精度测量系统中,为了精确识别扭摆运动的阻尼,转动惯量测量系统往往需要装备高精度的振动测量传感器,例如光栅位移传感器等,这不仅增加了系统的复杂性,也大大增加了系统的成本。由工业相机、镜头以及光源等构成的视觉测量系统具有精度高、成本低的特点,已被广泛应用于尺寸测量、缺陷检测等领域<sup>[24-27]</sup>。视觉测量技术同样适用于振动位移的检测,为了兼顾成本和精度,本文将视觉测量技术应用到刚体转动惯量的测量中,利用它对测量台运动过程中的扭摆角度进行定时记录,最终得到扭振运动曲线。这种方法在精确测定出扭振运动周期的同时还可以完整记录扭振运动的振幅衰减过程,通过数值分析得到扭振运动的阻尼参数。利用该阻尼参数和扭振运动周期来精确计算被测物体的转动惯量,有效解决阻尼对转动惯量测量的影响。

### 1 扭摆法原理

典型的扭摆法转动惯量测量台的结构如图 1 所示,其核心部件是驱动扭摆运动的弹性元件,例如扭簧、扭杆等。

测量时,将被测物体安装至载物台上,被测物体在弹性元件初始势能的作用下绕中心转轴进行往复扭摆运动,其运动过程受到来自空气摩擦阻力、轴承摩擦阻力等阻尼作用的影响。若不考虑阻尼的作用,转动惯量的测量将产生较大的误差。

根据阻尼状态下物体扭摆运动的力学分析可知,扭摆

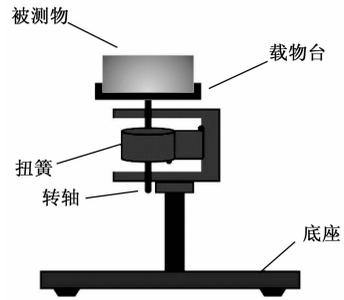


图 1 扭摆系统原理图

角  $\theta$  与时间  $t$  存在如下关系:

$$\theta(t) = \frac{\theta_0}{\sqrt{1-\zeta^2}} \exp(-\zeta\omega_n t) \cos(\omega_n t \sqrt{1-\zeta^2}) \quad (1)$$

式中,  $\theta_0$  为初始摆角,  $\zeta$  为扭振系统的阻尼比,  $\omega_n$  为无阻尼振动频率。根据式 (1) 可知扭摆曲线将以指数形式衰减。

转动惯量的计算公式为:

$$I = \frac{K}{(2\pi)^2} (1-\zeta^2) T_d^2 \quad (2)$$

式中,  $K$  为弹性元件的刚度系数,可由实验标定得到。 $\zeta$  为扭振系统的阻尼比,  $T_d$  为有阻尼扭摆振动周期。

若已知被测物体的扭摆运动曲线如图 2 所示,假设曲线上升(或下降)零点为  $T_i$ ,扭摆角的极大值为  $\theta_i$ ,其中  $i=0, 1, 2, \dots, n$ ,则阻尼比  $\zeta$  和有阻尼振动周期  $T_d$  可通过如下公式求解:

$$T_d = \frac{\sum_{i=0}^n (T_{i+1} - T_i)}{N+1} \quad (3)$$

$$\zeta = \frac{1}{2\pi N} \ln\left(\frac{\theta_0}{\theta_n}\right) \quad (4)$$

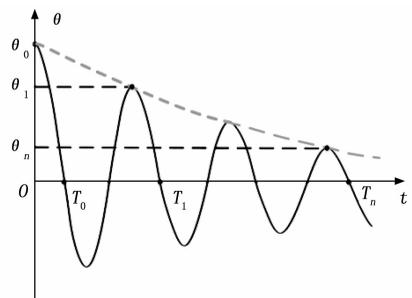


图 2 扭摆运动曲线示意图

因此,为了精确测量被测刚体的转动惯量,需要准确记录扭摆台的扭振运动曲线。本文采用视觉测量方法来记录扭摆运动。

### 2 视觉测量原理

#### 2.1 坐标系定义与转换

根据相机小孔成像模型可知,成像面上的每一个像点都对应于视野范围内的一个物点,因此根据图像处理得到的像点位置变化可推知其实际运动轨迹,为建立两者的

关系模型, 引入如下 4 个坐标系, 如图 3 所示。

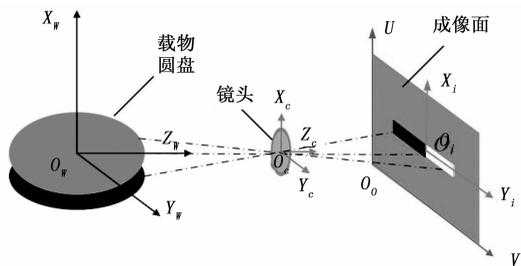


图 3 视觉测量坐标系示意图

1) 世界坐标系  $O_w-X_w Y_w Z_w$ , 是客观三维世界的绝对坐标系。该坐标系原点  $O_w$  被相机光轴经过, 而  $X_w$  轴与经过载物圆盘中心且垂直于其表面的直线重合;

2) 相机坐标系  $O_c-X_c Y_c Z_c$ , 以相机光心  $O_c$  为原点,  $X_c$  和  $Y_c$  轴分别与世界坐标系的  $X_w$  和  $Y_w$  轴平行, 且正方向一致,  $Z_c$  轴与光轴重合;

3) 像平面坐标系  $O_i-X_i Y_i$ , 原点  $O_i$  为光轴与像面的交点, 即图像的中心点,  $X_i$  和  $Y_i$  轴分别与世界坐标系的  $X_w$  和  $Y_w$  轴平行, 且正方向一致;

4) 像素坐标系  $O_0-U V$ , 原点  $O_0$  位于图像的一角, 该坐标系没有物理单位, 表示图像中像素的排列情况,  $U$  和  $V$  轴分别与图像两边平行, 正方向与像平面坐标系中  $X_i$  轴和  $Y_i$  轴一致。

设图中物距即物点与相机光心连线在光轴上投影的长度为  $U$ 。镜头的焦距为  $f$ 。

记某一物点  $A$  的世界坐标为  $(x_w, y_w, z_w)$ , 其分别对应相机坐标为  $(x_c, y_c, z_c)$ , 像平面坐标为  $(x_i, y_i)$ , 像素坐标为  $(u, v)$ 。根据上述 4 个坐标系的关系可知:

世界坐标  $(x_w, y_w, z_w)$  与相机坐标  $(x_c, y_c, z_c)$  的转化关系式为:

$$\begin{cases} x_c = x_w \\ y_c = y_w \\ z_c = -U \end{cases} \quad (5)$$

根据相机小孔成像模型和三角形相似定理可知, 相机坐标  $(x_c, y_c, z_c)$  与像平面坐标  $(x_i, y_i)$  存在如下关系:

$$U \begin{bmatrix} x_i \\ y_i \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f & 0 & 0 & 0 \\ 0 & f & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_c \\ y_c \\ U \\ 1 \end{bmatrix} \quad (6)$$

设像素坐标系原点  $O_0$  的坐标为  $(u_0, v_0)$ , 而单一像素块沿  $X$  轴和  $Y$  轴的长度分别为  $dx$ 、 $dy$ 。 $dx$ 、 $dy$  可分别由相机分辨率计算得到。则像平面坐标  $(x_i, y_i)$  和像素坐标  $(u, v)$  转换关系式为:

$$\begin{bmatrix} u \\ v \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{dx} & 0 & u_0 \\ 0 & \frac{1}{dy} & v_0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_i \\ y_i \\ 1 \end{bmatrix} \quad (7)$$

联合公式 (5) ~ (7) 可得物点世界坐标  $A(x_w, y_w, z_w)$  与其对应像素坐标  $A''(u, v)$  最终存在的关系为:

$$U \begin{bmatrix} u \\ v \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{f}{dx} & 0 & u_0 & Uu_0 \\ 0 & \frac{f}{dy} & v_0 & UV_0 \\ 0 & 0 & 1 & U \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_w \\ y_w \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (8)$$

即:

$$\begin{cases} x_w = \frac{U(u - u_0)dx}{f} \\ y_w = \frac{U(v - v_0)dy}{f} \end{cases} \quad (9)$$

### 2.2 扭摆运动角位移曲线的记录

为了能够及时记录扭摆运动的角位移, 本文采用如图 4 所示的黑白格标记物。将该标记物粘贴到扭摆测量台载物圆盘的边缘, 使得黑白格分界线与扭摆台中心轴线平行, 也即与世界坐标系  $X_w$  轴相平行。测量时, 利用视觉系统对标记物进行摄像得到检测视频。对视频中每一帧图像进行处理, 提取出标记物黑白格分界线的中心点, 该点在图像中的位置变化直接反映了扭摆运动的角位移变化。

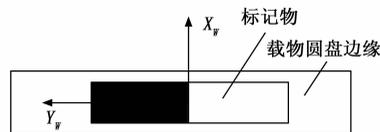


图 4 扭摆运动角位移追踪标记物示意图

为求得扭摆运动角位移  $\theta$ , 以载物圆盘圆心为原点  $O$ , 建立二维坐标系  $O-XY$ , 如图 5 所示。其中  $y$  轴穿过镜头光心  $O_c$ , 且与像平面交于中心点  $O_i$ 。平面  $XOY$  与载物圆盘表面平行。

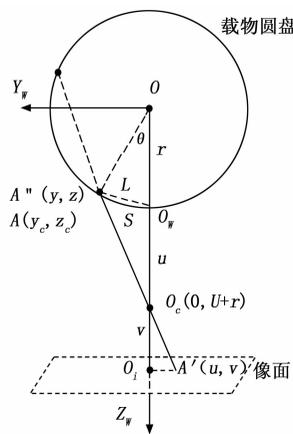


图 5 扭摆角计算示意图

圆  $O$  为转动惯量测量台投影于坐标系得到的圆, 其半径为  $r$ 。圆  $O$  的直线方程为:

$$x^2 + y^2 = r^2 \quad (10)$$

由图 5 坐标关系示意图可以看出, 载物圆盘的标记物在像面上的成像表现为右半部分为纯黑色矩形, 左半部分

为纯白色矩形。其中黑色与白色的交界线便是后续图像操作需要捕获的特征线。

记特征线中心点投影在二维平面坐标系中的坐标为  $A(x, y)$ ，则  $(A''u, r+m+n)$  为该点对应于相面中的投影， $m, n$  的定义如图 5 所示。而  $A'(x_w, r)$  为  $A(x, y)$  和  $A''(u, r+m+n)$  所在直线与像面的交点。将图像处理后的像点  $A''(u, r+m+n)$  进行坐标转换得到物点  $A'$  的坐标为  $(x_w, r)$ 。 $A''$  与  $A'$  的坐标转换关系满足公式 (9)。

已知镜头光心坐标为  $O_c(0, m+r)$ 。其中  $m$  即该点物距，可由实验测量得到。因此  $A'O_c$  直线方程为：

$$y = \frac{y_w - y_1}{x_w}x + m + r \quad (11)$$

联立方程 (10) 和 (11) 得到直线  $A'O_c$  与外圆  $O$  的交点，其中远离光心  $O_c$  的交点不符合实际，予以舍弃，从而筛选出实际物点坐标  $A(x, y)$ 。

因此根据  $A(x, y)$ 、 $O(0, 0)$  和  $O_w(0, r)$  三点坐标，可计算扭摆角  $\theta$ ，计算公式如下：

$$\theta = \arccos\left(\frac{|x + yr|}{r\sqrt{x^2 + y^2}}\right) \quad (12)$$

规定实际物点横坐标值为负时扭摆角  $\theta$  为负，反之为正。结合每帧图像的拍摄时间最终得到大量  $(t, \theta)$  数据组，用平滑曲线连接即得扭摆曲线。

### 2.3 图像预处理

由前文可知，为求取扭摆角度需要捕获像面特征线的坐标。为减小软件处理过程中可能存在的误差，后续图像预处理操作旨在捕获图像信息中白色部分轮廓，而后返回白色轮廓右边即特征线的横坐标。

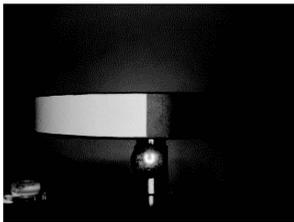


图 6 系统捕获实物图

为得到受噪音影响小，被测物特征更加明显的图像，需对采集得到的数字图像进行预处理操作。图像预处理手段主要为高斯模糊、二值化、形态学操作及 Canny 边缘处理。

先将得到的图像信息转换为灰度图。由于人眼会对三原色会表现出不同程度的敏感，因此为降低人眼偏差，需对图像信息进行灰度化处理，即对原有像素值求取加权平均化处理。即：

$$Gray = 0.587G + 0.299R + 0.114B \quad (13)$$

式中， $Gray$  指灰度图中某点对应的像素值， $G, R, B$  为原三通道图像中的各像素分量值。

高斯模糊即为用高斯分布权值矩阵与原始图像矩阵做

卷积运算，将结果作为当前像素的新值，有利于过滤噪音。

为便于后续操作，消除图像信息中可能存在的边缘阴影等无用信息及保留和突出被测物主体轮廓特征，需对图像进行二值化处理。二值化处理包括固定阈值处理法、最大类间方差法、迭代阈值、 $P$  参数法。此处采用固定阈值法，即在原图像的基础上按照某一阈值，得到像素值只为 0 或 255 的图像。

形态学操作是根据图像形状进行的简单操作，如膨胀、腐蚀、开操作和闭操作，该操作需要获取结构化元素。利用开操作可以有效去除二值图像中的干扰块，且不明显改变原有主体边界。

运用轮廓信息，可以快速得到被测物的周长、面积等客观特征。因此边缘算子的选择至关重要。此处选用计算量大，但捕获边缘性能强、错误率低的 Canny 算子。Canny 边缘处理即多级边缘检测算法，用于尽可能多地标识出图像的实际边缘。如图 7 为经过图像预处理后得到的实际效果图。

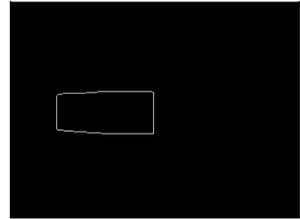


图 7 Canny 算法处理图

### 2.4 特征线提取

由前述可知，特征线即为图像预处理后的轮廓右边。因此需软件处理轮廓信息以输出右边坐标。为避免实验环境对轮廓捕获的影响，首先利用  $Mat$  定义一个 ROI 矩形，使得轮廓位置始终处于其中，同时外界的无用信息尽量最少被包括。

而后，运用  $findcontours()$  函数在 ROI 切割后的图像中对轮廓进行捕获。得到金属载物圆盘标记物白色矩形轮廓后，调用  $imshow()$  函数同时展示原图像和处理得到的边缘图像，运用  $drawContours()$  函数在原图像的窗口上画出轮廓，观察发现，捕获得到的轮廓与原图像白色部分边缘基本重合，证明处理后得到的轮廓具有较高准确度。

为输出特征线坐标，运用  $minAreaRect()$  函数将轮廓点集矢量化为点集的最小外接矩形。而后输出矩形右宽上点的横坐标的平均值。将得到的横坐标数据代入前文所建立的二维模型，即可求得扭摆角。最后将得到的待测物扭摆角关于视频帧数的数据集输出，算法流程图如图 8 所示。

## 3 测量实验

### 3.1 测量系统

根据本实验的测量原理，设计基于机器视觉和扭摆法原理的转动惯量测量系统如图 9 所示。其中扭摆台用于产生扭摆运动，黑色载物台侧面放置有白色直线标签。利用

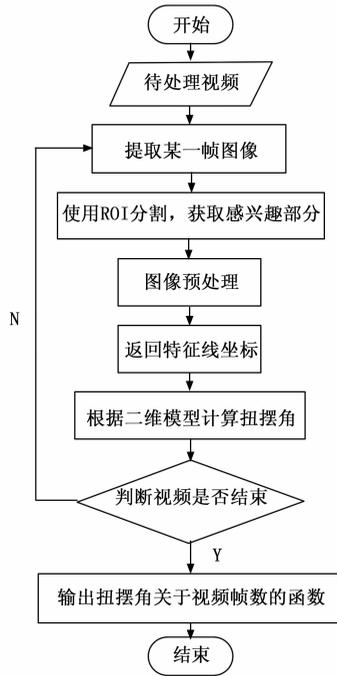


图 8 扭摆角输出流程图

高分率低畸变工业相机捕获标记线的摆动位置, 并将图像信息上传至上位机。最后在上位机完成图像处理和转动惯量的计算。

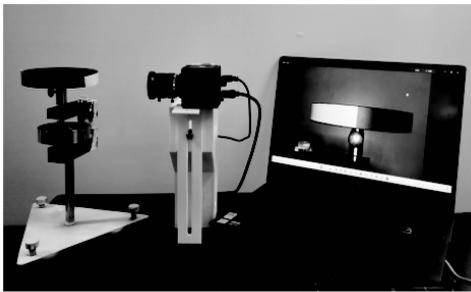


图 9 实验测量系统示意图

本系统采用工业相机对物体的运动状态进行捕捉。由于在识别过程中对相机的传输速率和动态图像分辨率有一定要求, 因此选择帧率为 211 帧/s、分辨率为 1 280 × 1 024 的相机进行实验。

实验测量时, 调节扭摆台底座使其处于水平状态, 并调整工业相机的支架高度使镜头中心正对直线标签, 确保相机视野清晰。由于扭摆台自身具有一定质量, 即存在空载转动惯量, 因此实验首先对空载时的转动惯量进行了测量, 以下实验结果均已减去空载转动惯量。每次测量将被测物体对称放置在载物圆盘的轴线上, 使其发生扭摆运动, 利用相机拍摄和记录直线标记的位置。

在测量系统上, 与采用气浮轴承减小转动惯量测量过程中的阻尼方法<sup>[28]</sup>相比, 本实验的测量成本低, 系统构成也更为简单; 而与采用光电计数装置进行扭摆形态的捕获

相比, 利用高帧率的工业相机使系统具有更高的时间分辨率, 能够获取精确的扭摆角数据, 从而实现高精度转动惯量测量。

### 3.2 测量结果

#### 3.2.1 重复性测量实验

对于质量均匀的实心圆柱标准件, 其质量为  $m = 0.510 \text{ kg}$ , 直径为  $D = 0.088 \text{ m}$ 。根据圆柱体转动惯量定义式:

$$I_0 = \frac{1}{8}mD^2 \quad (14)$$

计算可得其绕中心轴线的转动惯量为  $49.980 \times 10^{-5} \text{ kg} \cdot \text{m}^2$ , 以该值为测量的相对真值。

采用本文搭建的转动惯量测量系统对上述标准件进行实验, 经坐标转换和图像处理得到的扭摆曲线如图 10 所示。根据公式 (3) (4) 可计算得到周期  $T$  为 0.885 s, 阻尼比  $\zeta$  为 0.014 3。因此根据公式 (2) 的计算结果减去空载值后, 得被测转动惯量测量值为  $48.987 \times 10^{-5} \text{ kg} \cdot \text{m}^2$ 。

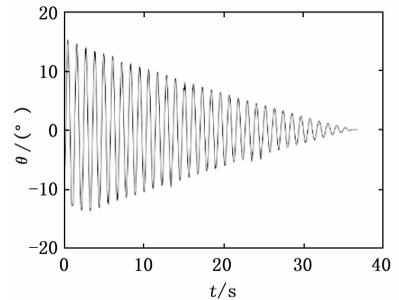


图 10 标准件扭摆曲线

为验证测量的重复性, 在相同的实验条件下对 10 个不同质量的标准件分别进行了 10 次测量实验, 结果如图 11 所示。其中单次测量的最大误差的绝对值为:  $2.513 7 \times 10^{-5} \text{ kg} \cdot \text{m}^2$ 。

计算每个标准件 10 次测量结果的平均值  $\bar{I}$  和标准差  $\delta$ , 并与转动惯量相对真值  $I_0$  比较得到绝对误差  $\Delta$ , 结果如表 1 所示。

表 1 多个标准件重复性实验结果

标准件	转动惯量真值 $I_0 \times 10^{-5} /$ $\text{kg} \cdot \text{m}^2$	测量平均值 $\bar{I} \times 10^{-5} /$ $\text{kg} \cdot \text{m}^2$	绝对误差 $\Delta \times 10^{-6} /$ $\text{kg} \cdot \text{m}^2$	标准差 $\delta \times 10^{-5}$
1	49.980	49.653	3.270	1.034 2
2	112.231	113.225	9.946	1.447 5
3	163.184	162.347	8.364	1.568 4
4	197.843	198.298	4.555	0.941 4
5	255.418	255.166	2.520	1.248 2
6	302.975	303.450	4.755	1.660 7
7	348.366	348.558	1.929	1.328 4
8	411.029	410.228	8.001	1.798 8
9	456.822	456.769	0.522	1.081 4
10	498.737	499.836	1.099	1.608 9

绘制 10 次实验的绝对误差  $\Delta$  和标准差  $\delta$  折线图如图 12

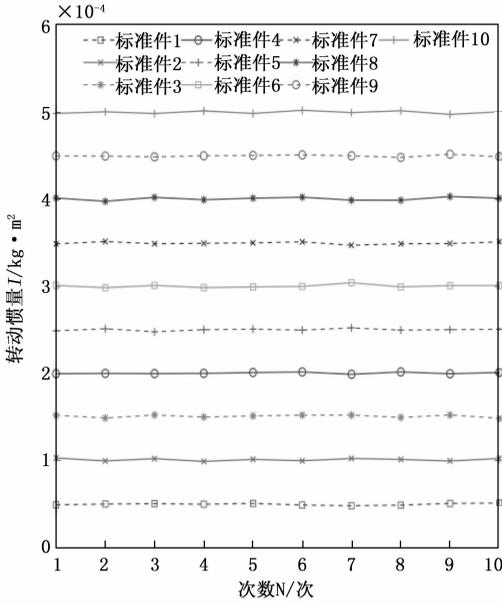


图 11 多个标准件转动惯量测量结果

所示。

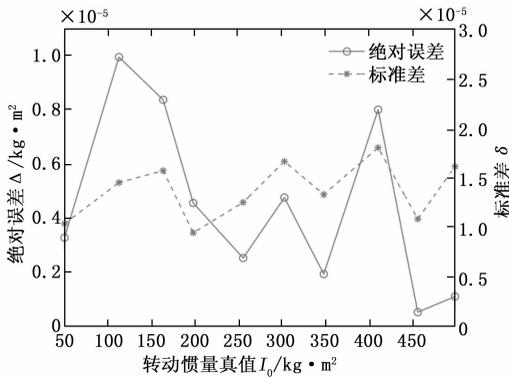


图 12 绝对误差和标准差折线图

实验结果表明，本文所采用的转动惯量测量系统精度高，10 次测量结果的平均值相对于真值的绝对误差不超过  $1.00 \times 10^{-5} \text{ kg} \cdot \text{m}^2$ ；在重复性上，多次实验的测量结果波动幅度小，且基本稳定在相对真值附近，其标准差不大于  $1.80 \times 10^{-5} \text{ kg} \cdot \text{m}^2$ 。

与其他测量方法相比较，同样是针对微小物体进行转动惯量的测量，文献 [29] 基于复摆法原理，利用光电计时模块获得复摆周期从而计算刚体转动惯量，其测量精度为 1.0%，重复性精度为 1.0%。文献 [30] 基于悬挂法和复摆法，利用图像分析得到的转动惯量相对误差可控制在 2% 以内。而本实验基于扭摆法原理，利用高分辨率工业相机捕获扭摆运动，并对测量过程中的阻尼误差进行补偿，在  $0-5 \times 10^{-3} \text{ kg} \cdot \text{m}^2$  范围内，单次测量误差小于量程的 0.50%，重复性精度则优于 0.40%，有效证明了该方法的准确性和可行性，为工程上应用机器视觉技术测量刚体转动惯量提供了新思路。

### 3.2.2 阻尼对转动惯量测量的影响

本实验系统采用机械轴承来支撑回转轴，扭振运动过程中受到机械摩擦阻尼的影响较大。为了研究阻尼作用对扭摆法转动惯量测量结果的影响，对 10 个不同转动惯量、不同外形特点的不规则被测物体进行实验测试，对比考虑阻尼比前后的计算结果，如表 2 所示。

表 2 阻尼比对转动惯量的影响

被测物体编号	阻尼比	考虑阻尼比转动惯量测量值 $I / \text{kg} \cdot \text{m}^2$	忽略阻尼比转动惯量计算值 $I' / \text{kg} \cdot \text{m}^2$	相对偏差 / %
1	0.012 4	$3.867 2 \times 10^{-5}$	$3.867 8 \times 10^{-5}$	0.015 5
2	0.013 0	$8.005 9 \times 10^{-5}$	$8.007 3 \times 10^{-5}$	0.017 5
3	0.014 3	$1.644 3 \times 10^{-4}$	$1.644 6 \times 10^{-4}$	0.020 7
4	0.016 0	$3.425 5 \times 10^{-4}$	$3.426 3 \times 10^{-4}$	0.025 7
5	0.017 3	$7.926 4 \times 10^{-4}$	$7.928 8 \times 10^{-4}$	0.029 8
6	0.026 2	$1.561 0 \times 10^{-3}$	$1.562 1 \times 10^{-3}$	0.068 9
7	0.037 7	$3.049 2 \times 10^{-3}$	$3.053 5 \times 10^{-3}$	0.142 6
8	0.045 5	$4.535 4 \times 10^{-3}$	$4.544 8 \times 10^{-3}$	0.207 0
9	0.051 9	$5.404 0 \times 10^{-3}$	$5.418 6 \times 10^{-3}$	0.270 4
10	0.058 9	$6.947 1 \times 10^{-3}$	$6.971 3 \times 10^{-3}$	0.348 6

根据表 3 结果，在同一坐标系下绘制 10 种被测物分别在考虑阻尼比和忽略阻尼比情况下的相对偏差折线图如图 13 所示。

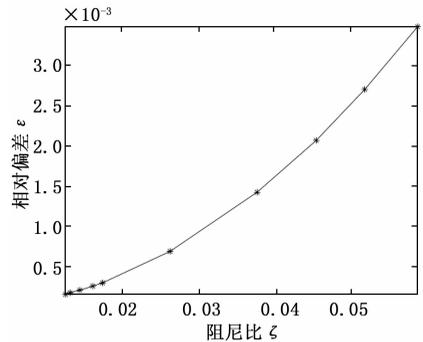


图 13 考虑阻尼比前后相对偏差折线图

根据上述测量结果和图 13 可知，被测物体的转动惯量越大，忽略阻尼比导致的相对偏差也越大，结合公式 (2)，当阻尼比超过 0.2 时，忽略阻尼比导致的相对偏差将超过 4%。

因此，实际应用扭摆法对大转动惯量刚体进行测量时，阻尼比的准确获取尤为重要，而本文所述的测量方法通过精确测量阻尼比对转动惯量值进行修正，提高了测量精度。

## 4 结束语

本文提出基于机器视觉和扭摆法原理的刚体转动惯量测量技术，对物体进行实验测量分析以验证此技术的可行性，并在此基础上研究阻尼比在测量过程中对实验数据的影响并得到如下结论：

- 1) 本文给出了大阻尼条件下物体转动惯量的计算公

式,精确表达了阻尼比对物体转动惯量测量值的影响。结合机器视觉的方法,得到了被测物的扭摆运动曲线进而求取相关数据。

2) 本文提出的转动惯量测量技术,经实验验证测量准确性高,误差较小,10次测量平均值的绝对误差不超过 $1.00 \times 10^{-5} \text{ kg} \cdot \text{m}^2$ ,且基于扭摆法使用低成本普通轴承的实验,更大大降低了测量成本。

3) 实验中通过对同一物体进行多种重复实验,各组数据的标准差小于 $1.80 \times 10^{-5} \text{ kg} \cdot \text{m}^2$ ,验证了系统实验的可重复性。

4) 对实验数据分析中,发现在不考虑阻尼比情况下,物体转动惯量测量值的相对偏差将随着被测物转动惯量的增大而增加。

#### 参考文献:

- [1] 王鑫洪,徐在峰,赵科,等. 航天器质量特性测试技术新进展 [J]. 航天器环境工程, 2011, 28 (2): 171-174.
- [2] 王小三,刘云平,倪怀生,等. 转动惯量测量研究的进展及展望 [J]. 宇航计测技术, 2019, 39 (2): 1-5.
- [3] 徐亚杰. 基于船舶模型的横摇转动惯量计算和仿真分析 [J]. 农业装备与车辆工程, 2020, 58 (8): 92-96.
- [4] 吴俊刚,丁飞,周建文,等. 商用车驾驶室质心与转动惯量测量方法 [J]. 计量学报, 2018, 39 (5): 693-967.
- [5] MONDAL N, ACHARYYA S, SAHA R, et al. Optimum design of mounting components of a mass property measurement system [J]. Measurement, 2016, 78: 309-321.
- [6] SHAKOORI A, BETIN A V, and BETIN D A. Comparison of three methods to determine the inertial properties of free-flying dynamically similar models [J]. Journal of Engineering Science and Technology, 2016, 11 (10): 1360-1372.
- [7] GOBBI M, MASTINU G, and PREVIATI G. A method for measuring the inertia properties of rigid bodies [J]. Mechanical Systems and Signal Processing, 2011, 25 (1): 305-318.
- [8] TANG L, SHANGGUAN W B. An improved pendulum method for the determination of the center of gravity and inertia tensor for irregular-shaped bodies [J]. Measurement, 2011, 44 (10): 1849-1859.
- [9] KLAUS L. Comparison of two experiments based on a physical and a torsion pendulum to determine the mass moment of inertia including measurement uncertainties [J]. Measurement Science Review, 2017, 17 (1): 9-18.
- [10] OLMEDO N A, BARCZYK M, and LIPSETT M. Experimental determination of the inertial properties of small robotic systems using a torsion platform [J]. Mechanical Systems and Signal Processing, 2019, 131: 71-96.
- [11] KIM D H, et al. Combined estimation method for inertia properties of STSAT-3 [J]. Journal of Mechanical Science and Technology, 2010, 24 (8): 1737-1741.
- [12] 王秋晓,王迎. 飞行器质量特性参数测量 [J]. 重庆大学学报, 2011, 34 (12): 23-27.
- [13] 徐向辉,陈平,唐一科,等. 弹箭转动惯量的反复摆法测量及误差分析 [J]. 弹箭与制导学报, 2016, 36 (1): 149-153.
- [14] 穆继亮. 基于阻尼分析的转动惯量测量研究 [J]. 中国仪器仪表, 2009 (5): 60-70.
- [15] 郭志荣,毛天喜,杨振. 扭摆法测刚体转动惯量中空气阻尼的数值模拟 [J]. 兰州文理学院学报(自然科学版), 2014, 28 (1): 38-40.
- [16] ZHAO Y, ZHANG B F, HAN F F, et al. Instantaneous characteristics of nonlinear torsion pendulum and its application in parameter estimation of nonlinear system [J]. Mathematical Problems in Engineering, 2018: 7858403.
- [17] TENG L, YANG H, and JIN Z H. Novel measurement method for determining mass characteristics of pico-satellites [J]. Applied Sciences-Basel, 2018, 8 (1): 104.
- [18] 王超,唐文彦,张晓琳,等. 大尺寸非回转体质量特性一体化测量系统的设计 [J]. 仪器仪表学报, 2012, 33 (7): 1634-1640.
- [19] 边志强,唐振刚,栗双岭,等. 航天器转动惯量和惯性积的集成一体化测试方法 [J]. 航天制造技术, 2017 (6): 16-25.
- [20] BRANCATI R, RUSSO R, SAVINO S. Method and Equipment for Inertia Parameter Identification [J]. Mechanical System and Signal Processing, 2010, 24 (1): 29-40.
- [21] PREVIATI G, MASTINU G, and GOBBI M. Measurement of the mass properties of rigid bodies by means of multi-filar pendulums-Influence of test rig flexibility [J]. Mechanical Systems and Signal Processing, 2019, 121: 31-34.
- [22] 张敬轩,高丽宏,李宣瑾,等. 高精度转动惯量测控系统的设计 [J]. 轻工科技, 2021, 37 (11): 65-68.
- [23] 易伟松,刘熹微,何展航,等. 利用智能手机磁力计定量测量刚体转动惯量 [J]. 大学物理实验, 2021, 34 (6): 36-39.
- [24] 邹哲康,朱铮涛,陈映谦,等. 基于机器视觉的最大内接矩形快速检测算法 [J]. 计算机测量与控制, 2021, 29 (6): 194-198.
- [25] 彭杰,孟祥印,李晟尧,等. 基于机器视觉的工件分拣及上下料系统 [J]. 机床与液压, 2021, 49 (21): 38-42.
- [26] 杨利,陈柳松,谢永超,等. 基于机器视觉的芯片引脚缺陷检测系统设计与实现 [J]. 计算机测量与控制, 2021, 29 (7): 16-20.
- [27] 张春伟,彭善飞,刘晓峰,等. 基于机器视觉的轨道车辆零部件形位尺寸检测方法研究 [J]. 计算机测量与控制, 2020, 28 (9): 106-109.
- [28] 刘成龙,蔡洪,白锡斌. 浮球式惯性平台转动惯量辨识方法研究 [J]. 战术导弹技术, 2018 (2): 80-89, 94.
- [29] 王向军,王凯. 微小物体转动惯量测量机理与实现方法研究 [J]. 传感技术学报, 2019, 32 (2): 183-189.
- [30] 李凯,周璟成. 基于图像分析的质心和转动惯量测量方法 [J]. 力学与实践, 2021, 43 (5): 771-775.